GEOMETRIA ESPACIAL

Professores: Jotair Kwaitkowski Jr e Maria Regina Lopes

Caros alunos,

Esse ebook é um pdf interativo. Para conseguir acessar todos os seus recursos, é recomendada a utilização do programa Adobe Reader 11.

Caso não tenha o programa instalado em seu computador, segue o link para download:

http://get.adobe.com/br/reader/

Para conseguir acessar os outros materiais como vídeos e sites, é necessário também a conexão com a internet.

O menu interativo leva-os aos diversos capítulos desse ebook, enquanto a barra inferior pode lhe redirecionar ao índice ou às páginas anteriores e posteriores.

Nesse *pdf*, o professor da disciplina, através de textos próprios ou de outros autores, tece comentários, disponibiliza links, vídeos e outros materiais que complementarão o seu estudo.

Para acessar esse material e utilizar o arquivo de maneira completa, explore seus elementos, clicando em botões como flechas, linhas, caixas de texto, círculos, palavras em destaque e descubra, através dessa interação, que o conhecimento está disponível nas mais diversas ferramentas.

Boa leitura!

Apresentação

Este é um material complementar à disciplina de Geometria Espacial. Neste e-book, trabalharemos com:

- POLIEDROS
- RELAÇÃO DE EULER
- PRISMAS
- PARALELEPÍPEDOS
- CUBOS
- CILINDROS
- PIRÂMIDES
- ESFERAS

Lembre-se sempre que o e-book é um material complementar aos demais materiais utilizados, tendo uma teoria básica sobre o tema geometria espacial. Assista aos vídeos indicados, pois são interativos e com exemplos de fácil assimilação.

Os professores e tutores estão a sua disposição para tirar dúvidas.

Bom estudo a todos!!!

Prof. Jotair Kwaitkowski Jr.

Prof. Maria Regina Lopes

1 - Introdução e contexto histórico

É uma área da matemática que se encarrega de estudar as figuras no espaço, ou seja, aquelas que possuem mais de duas dimensões. Em geral, a Geometria Espacial pode ser definida como o estudo da geometria no espaço. Assim, como Geometria Plana, ela está pautada nos conceitos basilares e intuitivos que chamamos conceitos primitivos, os quais possuem origem na Grécia Antiga e na Mesopotâmia (cerca de 1000 anos a.C.). Não obstante, Pitágoras e Platão associavam o estudo da Geometria Espacial ao estudo da Metafísica e da religião; contudo, foi Euclides a se consagrar com sua obra “Elementos”, na qual sintetizou os conhecimentos acerca do tema até os seus dias. Entretanto, os estudos de Geometria Espacial permaneceram estanques até o fim da Idade Média, quando Leonardo Fibonacci (1170-1240) escreve a “PracticaGeometriae” e, séculos depois, Joannes Kepler (1571-1630) rotula o “Steometria” (stereo: volume/metria: medida) o cálculo de volume, em 1615.

GEOMETRIA PLANA | **PITÁGORAS** | **PLATÃO** | **EUCLIDES** | **FIBONACCI** | **KEPLER**

Os estudos iniciais sobre Geometria Plana estão relacionados à Grécia Antiga, também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), grande matemático educado na cidade de Atenas e frequentador da escola fundamentada nos princípios de Platão. Os princípios que levaram à elaboração da Geometria Euclidiana eram baseados nos estudos do ponto, da reta e do plano. O ponto era considerado um elemento que não tinha definição plausível, a reta era definida como uma sequência infinita de pontos e o plano definido através da disposição de retas. As definições teóricas da Geometria de Euclides estão baseadas em axiomas, postulados, definições e teoremas que estruturam a construção de variadas formas planas. Os polígonos são representações planas que possuem definições, propriedades e elementos.

2 - A Geometria Espacial

TEXTO

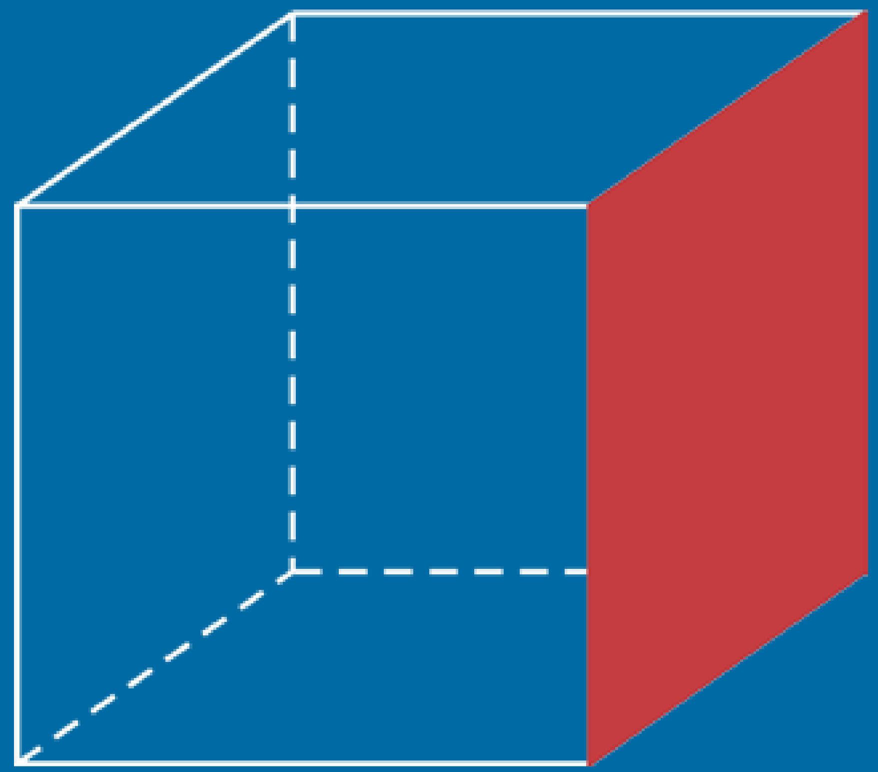
2.1 - Geometria Espacial Métrica

2.1.1 - Poliedro

VÍDEO

É um solido geométrico que possui limitações de polígonos, que dois a dois têm um lado em comum.
São os elementos básicos dos poliedros: faces, arestas, vértices e diagonais.

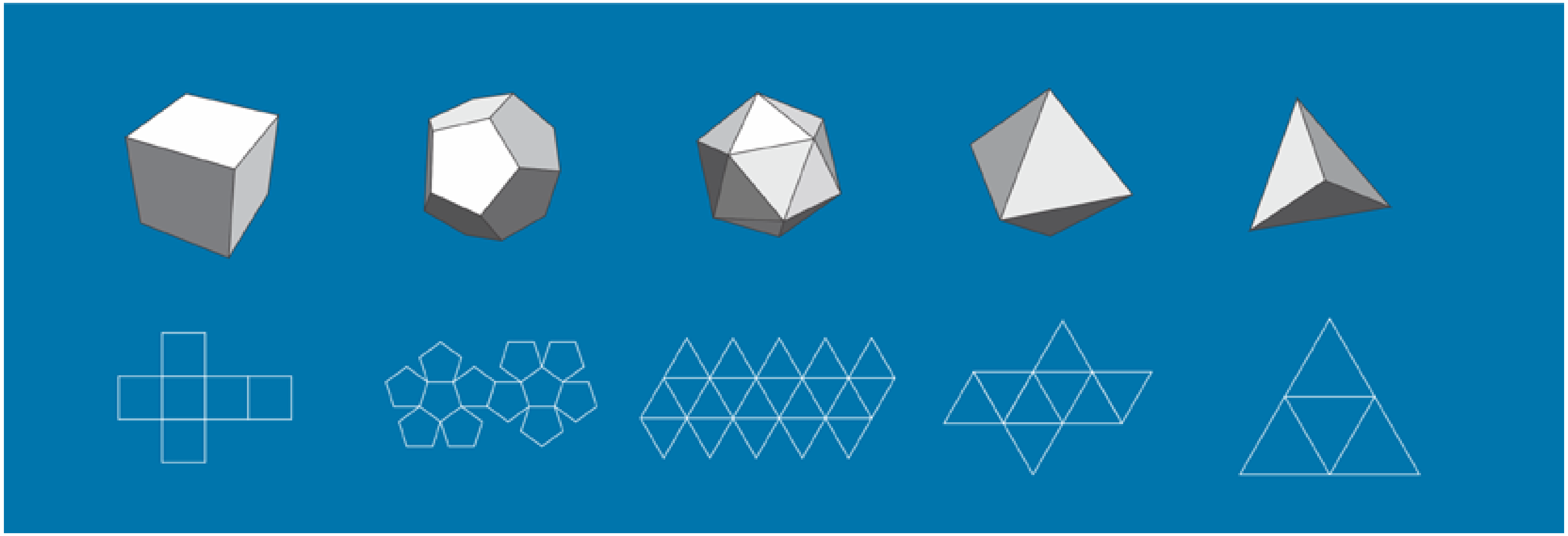
FACES | ARESTAS | VÉRTICES | DIAGONAIS



Faces é como um lado da forma geométrica espacial. Cada face é composta de no mínimo três arestas para poder ter uma forma definida.

2.1.2- Poliedros Convexos

É dito que um poliedro é convexo se está, em relação a uma de suas faces, todo contido no mesmo semiespaço determinado por esta mesma face.



2.1.3- Poliedros Regulares

Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares, todos com o mesmo número de lados e, em cada vértice do poliedro, encontram-se sempre o mesmo número de arestas.

2.1.4 - Relação de Euler

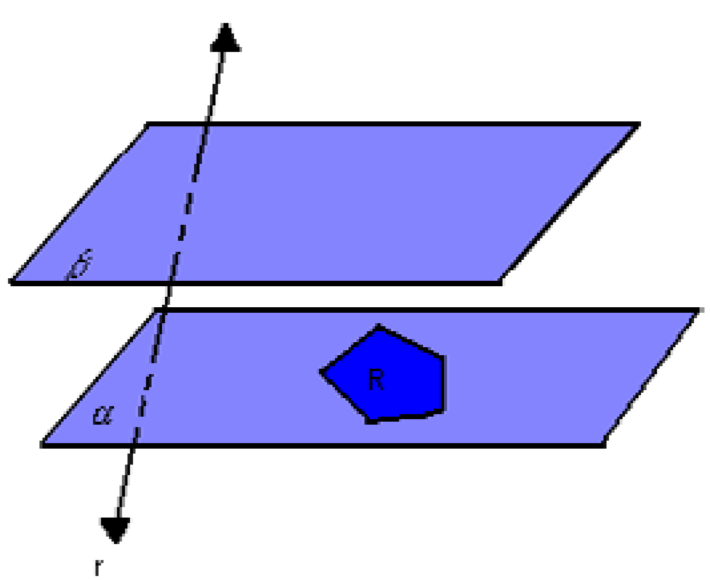
TEXTO

Em todo poliedro convexo cujo numero de vértices é V, o numero de arestas é A e o numero de faces é F, vale a relação: **V-A+F=2**

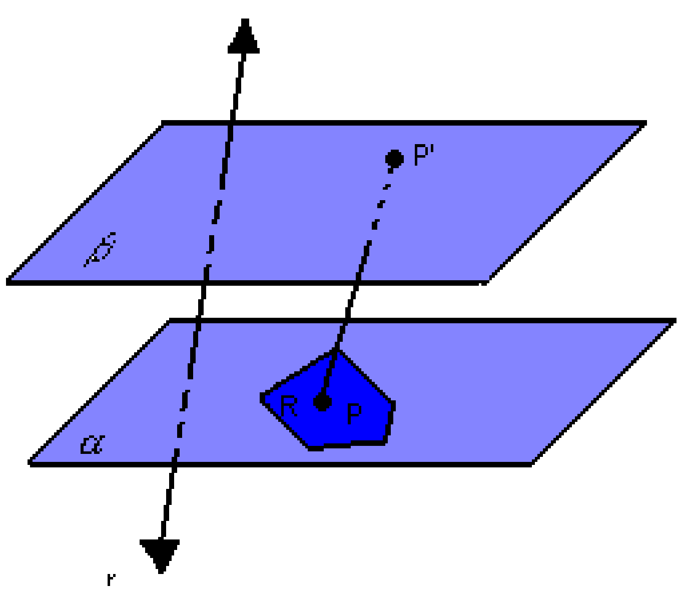
2.2- Prismas:

VÍDEO

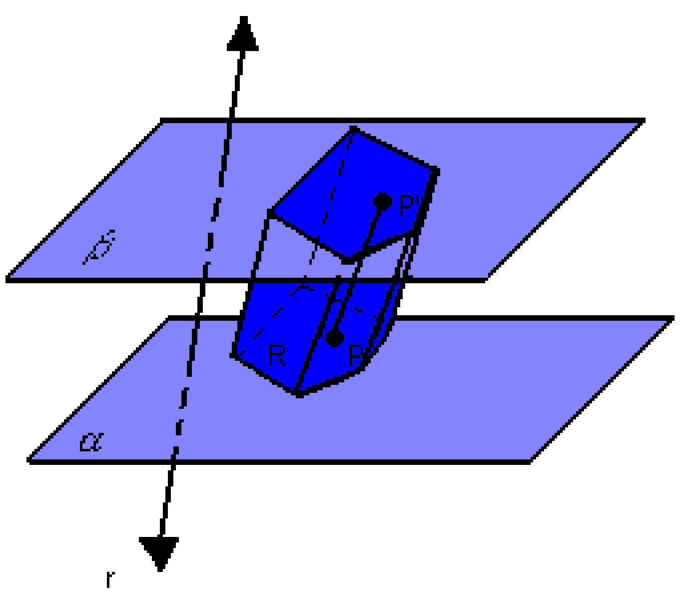
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo R contido em α e uma reta r que intercepta α e β , mas não R:



Para cada ponto **P** da região **R**, vamos considerar o segmento $\overline{PP'}$, paralelo à reta r ($P' \in \beta$):



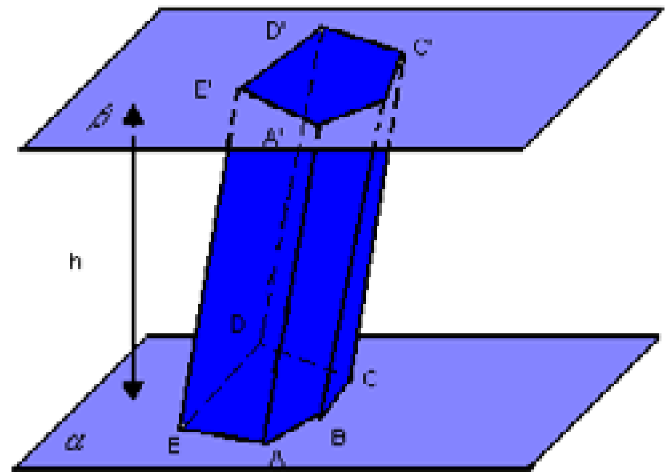
Assim temos:



Chamamos de prisma, ou prisma limitado, o conjunto de todos os segmentos congruentes paralelos a r.

Elementos do prisma

Dados o prisma a seguir, consideramos os seguintes elementos:



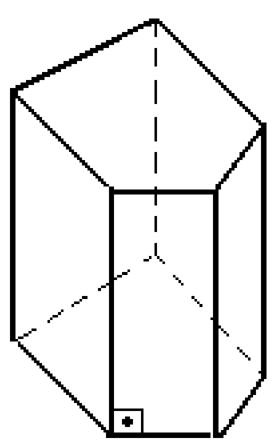
- bases: as regiões poligonais R e S
- altura: a distância h entre os planos
- arestas das bases: os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$ (dos polígonos)
- arestas laterais: os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$
- faces laterais: os paralelogramos AA'BB', BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A

Classificação

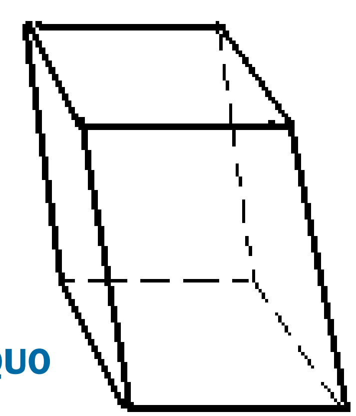
Um prisma pode ser:

- reto: quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases;
- oblíquo: quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Veja:

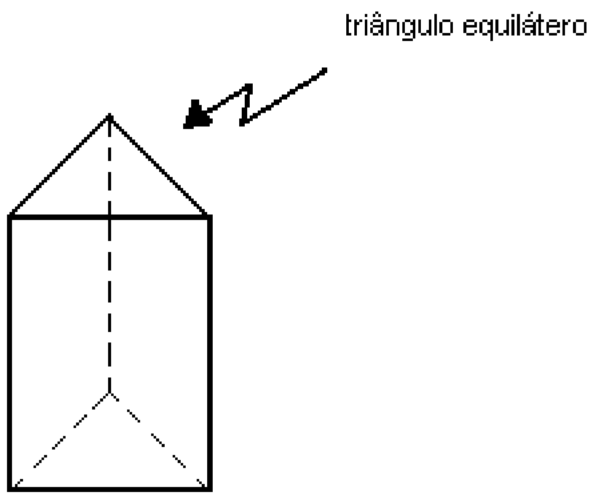


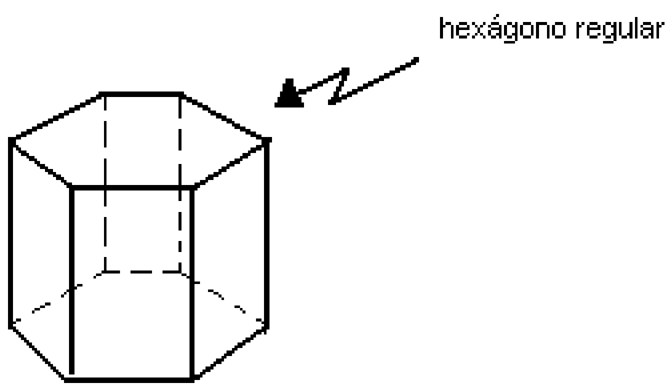
PRISMA RETO



PRISMA OBLÍQUO

Chamamos de prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares:





PRISMA REGULAR TRIANGULAR

PRISMA REGULAR HEXAGONAL

Observação: As faces de um prisma regular são retângulos congruentes.

Secção

Um plano que intercepte todas as arestas de um prisma determina nele uma região chamada secção do prisma.

Secção transversal é uma região determinada pela intersecção do prisma com um plano paralelo aos planos das bases (figura 1). Todas as secções transversais são congruentes (figura 2).

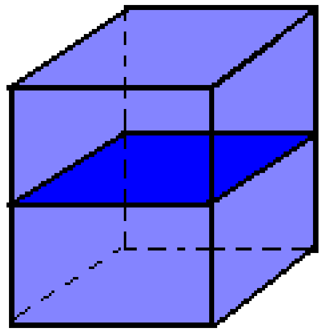


FIGURA 1

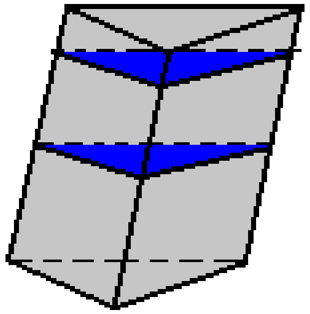


FIGURA 2

Áreas

Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície: as faces e as bases. Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área de uma face (A_F): área de um dos paralelogramos que constituem as faces;

b) área lateral (A_L): soma das áreas dos paralelogramos que formam as faces do prisma.

No prisma regular, temos: $A_L = n \cdot A_F$ (n = número de lados do polígono da base)

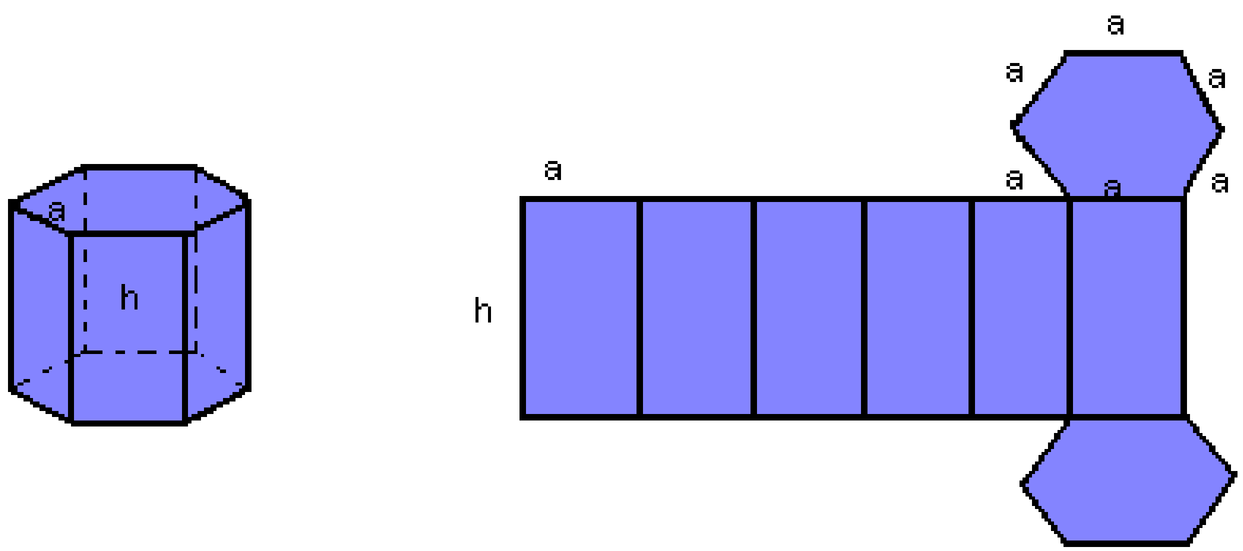
c) área da base (A_B): área de um dos polígonos das bases;

d) área total (A_T): soma da área lateral com a área das bases

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Vejamos um exemplo.

Dado um prisma hexagonal regular de aresta da base a e aresta lateral h, temos:



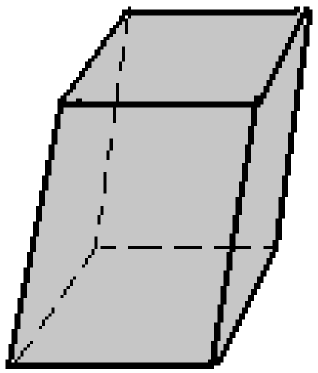
$$A_F = ah$$

$$A_L = 6ah$$

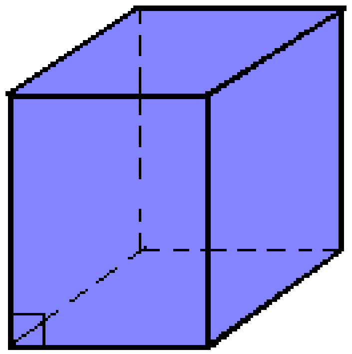
$$A_B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \text{ (área do hexágono regular)}$$

2.4- Paralelepípedo

Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo. Assim, podemos ter:



A) PARALELEPÍPEDO OBLÍQUO

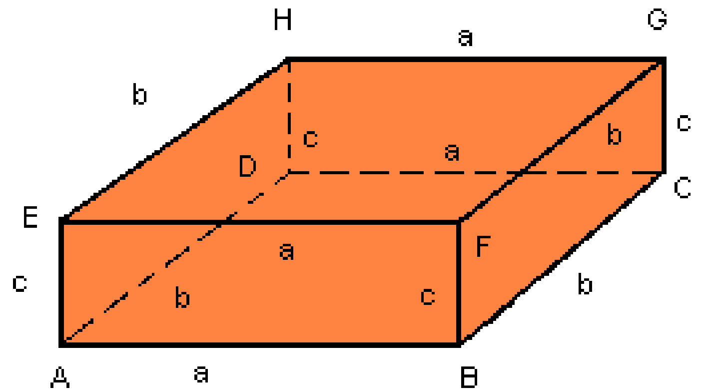


B) PARALELEPÍPEDO RETO

Se o paralelepípedo reto tem bases retangulares, ele é chamado de paralelepípedo reto-retângulo, ortoedro ou paralelepípedo retângulo.

Paralelepípedo retângulo

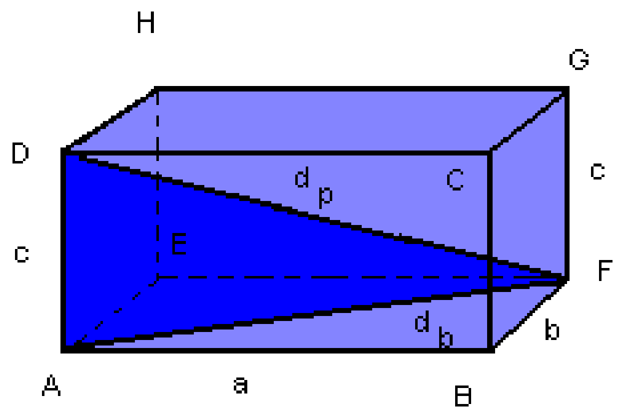
Seja o paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c da figura:



Temos quatro arestas de medida a, quatro arestas de medida b e quatro arestas de medida c; as arestas indicadas pela mesma letra são paralelas.

Diagonais da base e do paralelepípedo

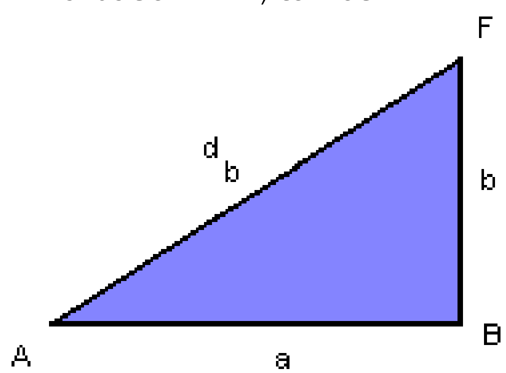
Considere a figura a seguir:



db = diagonal da base

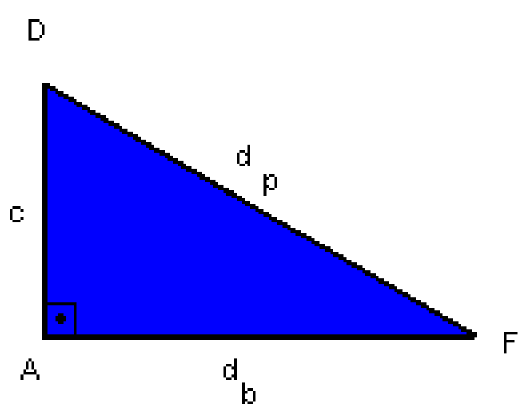
dp = diagonal do paralelepípedo

Na base ABFE, temos:



$$d_b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

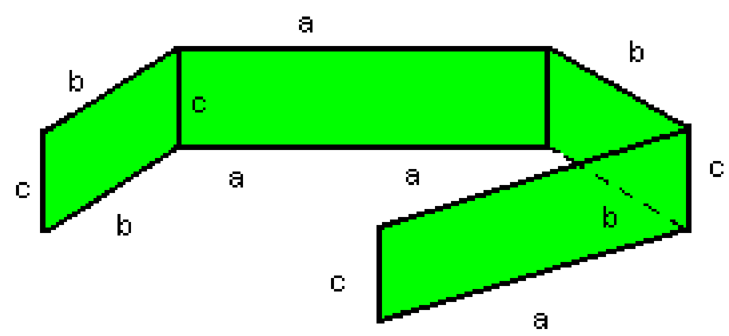
No triângulo AFD, temos:



$$d_p^2 = d_b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Área lateral

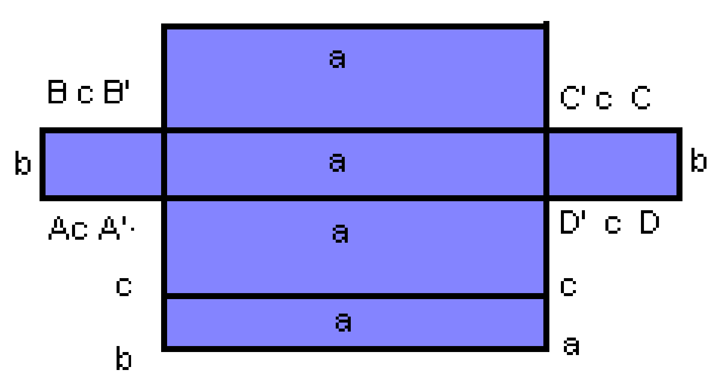
Sendo AL a área lateral de um paralelepípedo retângulo, temos:



$A_L = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = A_L = 2(ac + bc)$

Área total

Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas:



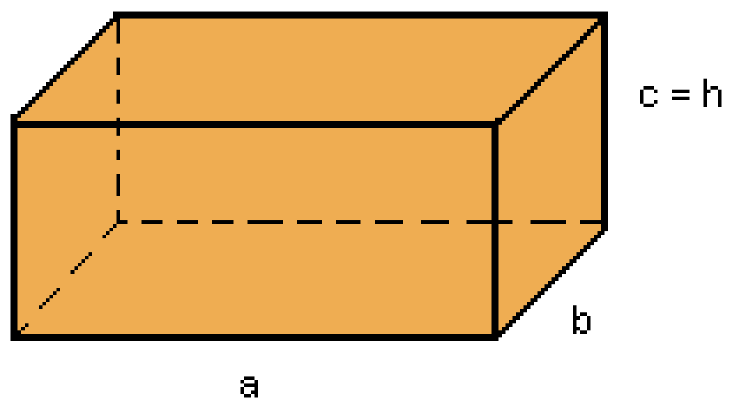
$A_T = 2(ab + ac + bc)$

Volume

O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é dado por:

$$V = abc$$

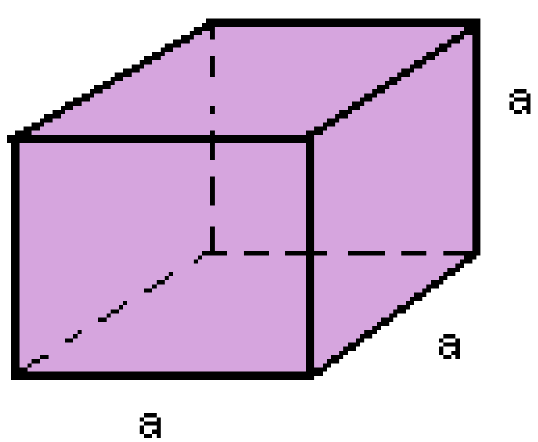
Como o produto de duas dimensões resulta sempre na área de uma face e como qualquer face pode ser considerada como base, podemos dizer que o volume do paralelepípedo retângulo é o produto da área da base AB pela medida da altura h:



$$V = A_B h$$

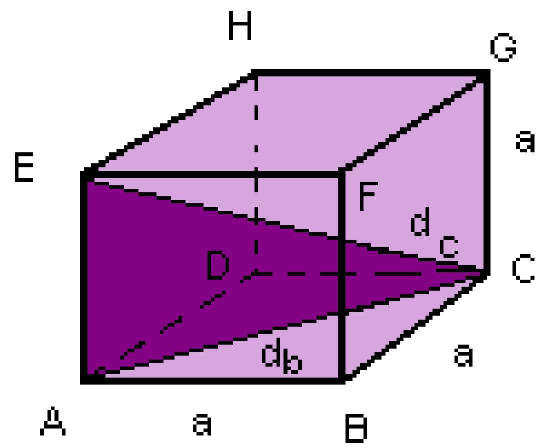
2.5- Cubo

Um paralelepípedo retângulo com todas as arestas congruentes (a= b = c) recebe o nome de cubo. Dessa forma, as seis faces são quadrados.



Diagonais da base e do cubo

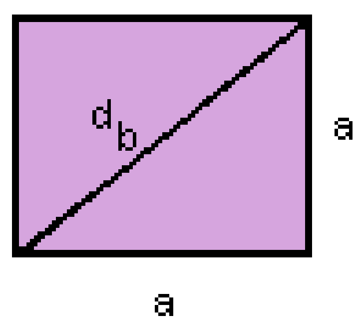
Considere a figura a seguir:



dc = diagonal do cubo

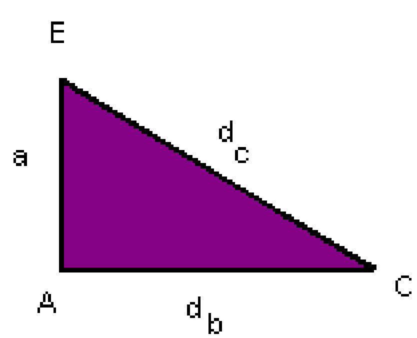
db = diagonal da base

Na base ABCD, temos:



$$d_b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_b = a\sqrt{2}$$

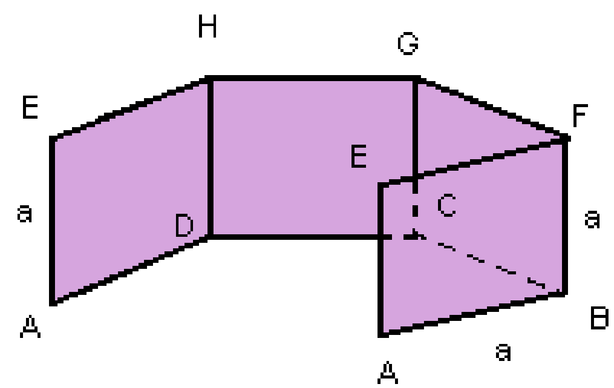
No triângulo ACE, temos:



$$d_c^2 = a^2 + d_b^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow d_c = a\sqrt{3}$$

Área lateral

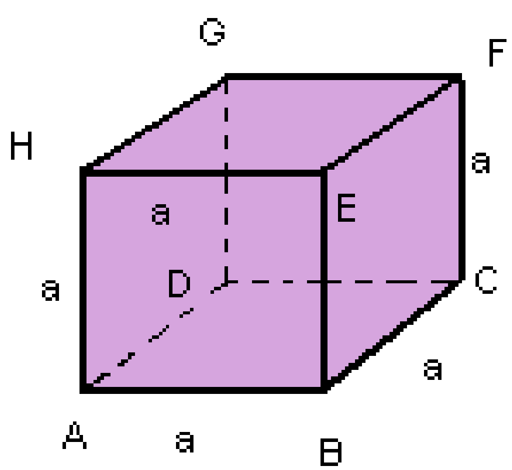
A área lateral A_L é dada pela área dos quadrados de lado a:



$A_L = 4a^2$

Área total

A área total A_T é dada pela área dos seis quadrados de lado a:



$A_T = 6a^2$

Volume

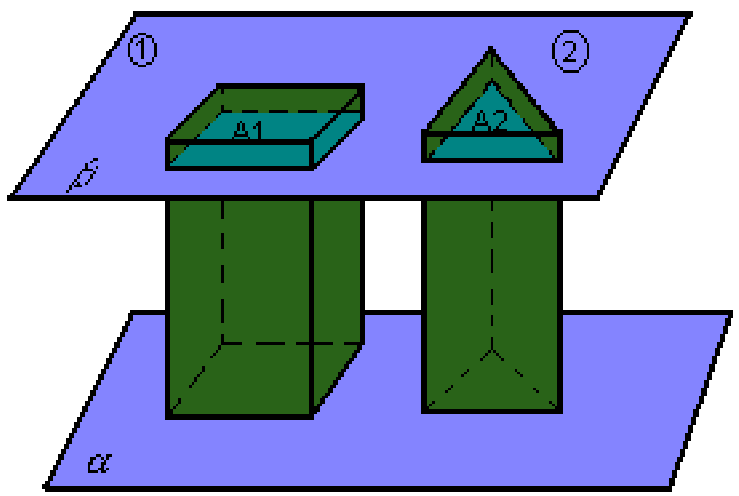
De forma semelhante ao paralelepípedo retângulo, o volume de um cubo de aresta a é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$

2.6 - Generalização do volume de um prisma

Para obter o volume de um prisma, vamos usar o princípio de Cavalieri (matemático italiano, 1598 - 1697), que generaliza o conceito de volume para sólidos diversos.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo a α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:



$$\alpha // \beta \text{ e } A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

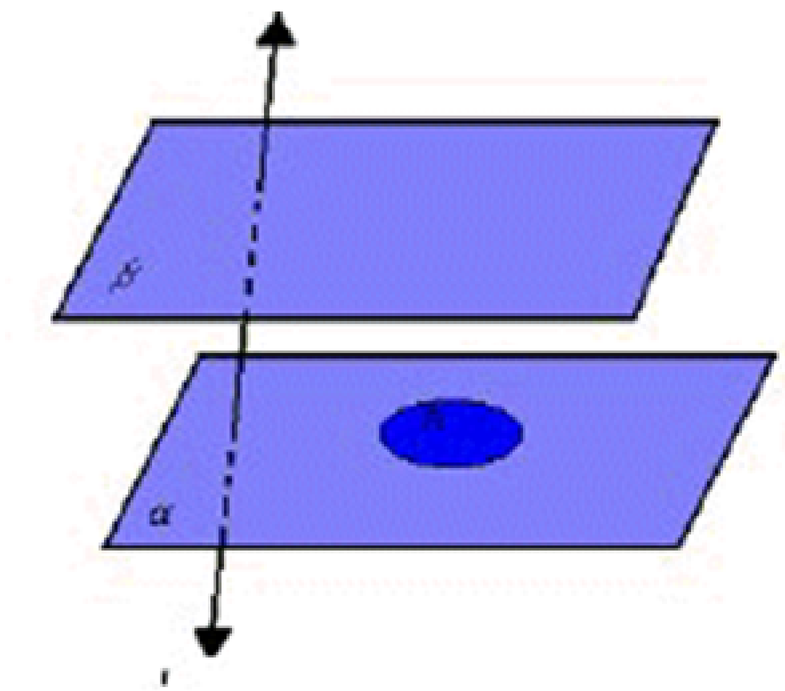
Assim, o volume de todo prisma e de todo paralelepípedo é o produto da área da base pela medida da altura:

$$\mathbf{V_{prisma} = A_B h}$$

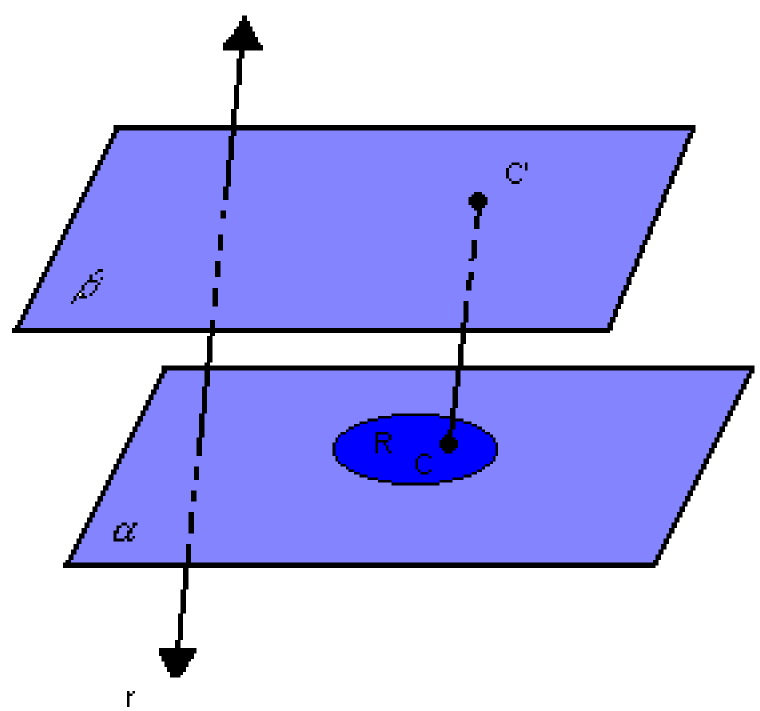
2.7- Cilindro

VÍDEO

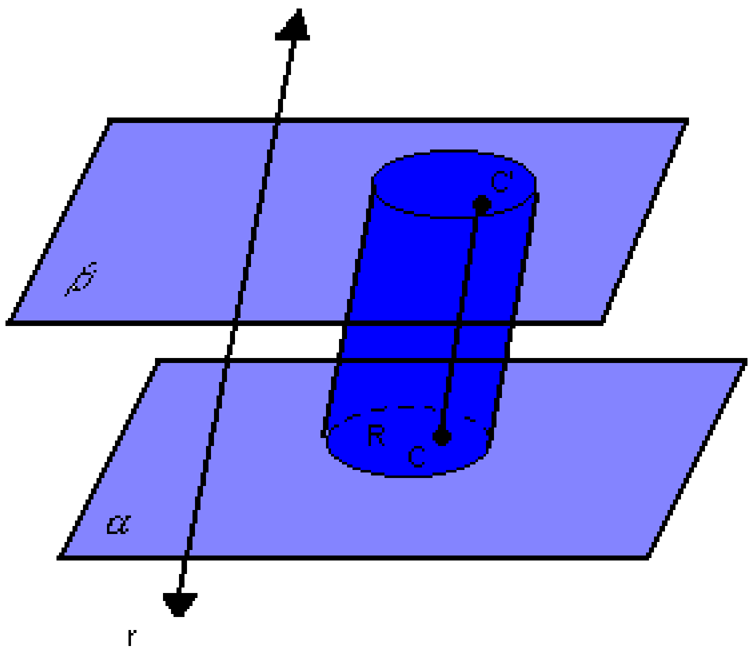
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um círculo R contido em α e uma reta r que intercepta α e β, mas não R:



Para cada ponto C da região R, vamos considerar o segmento $\overline{CC'}$, paralelo à reta r ($C' \in \beta$):



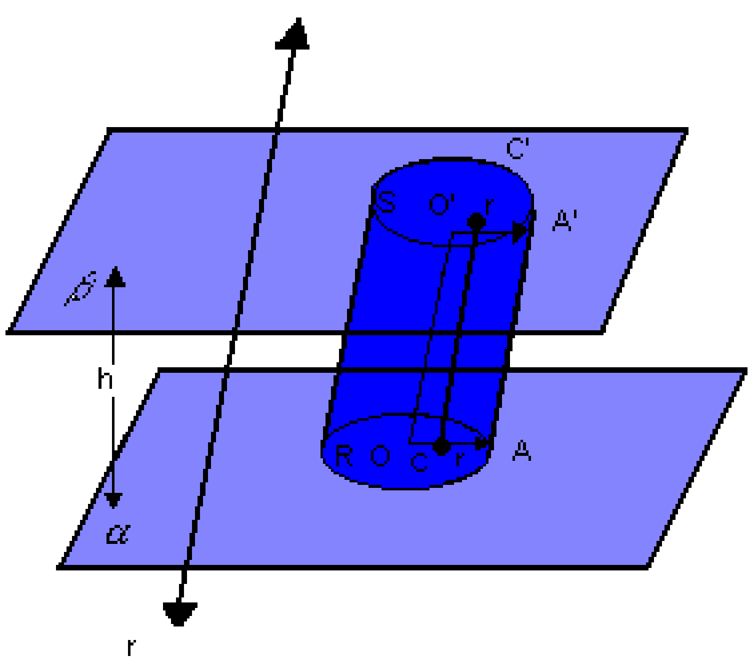
Assim, temos:



Chamamos de cilindro, ou cilindro circular, o conjunto de todos os segmentos $\overline{CC'}$ congruentes e paralelos a r.

Elementos do cilindro

Dado o cilindro a seguir, consideramos os seguintes elementos:



bases: os círculos de centro O e O'e raios r

altura: a distância h entre os planos α e β

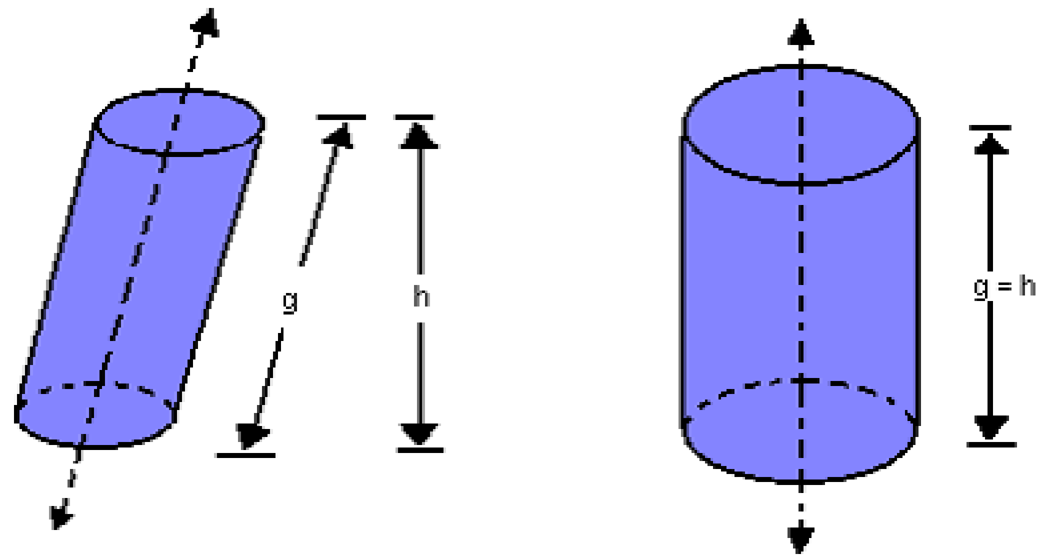
geratriz: qualquer segmento de extremidades nos pontos das circunferências das bases (por exemplo, $\overline{AA'}$) e paralelo à reta r

Classificação do Cilindro

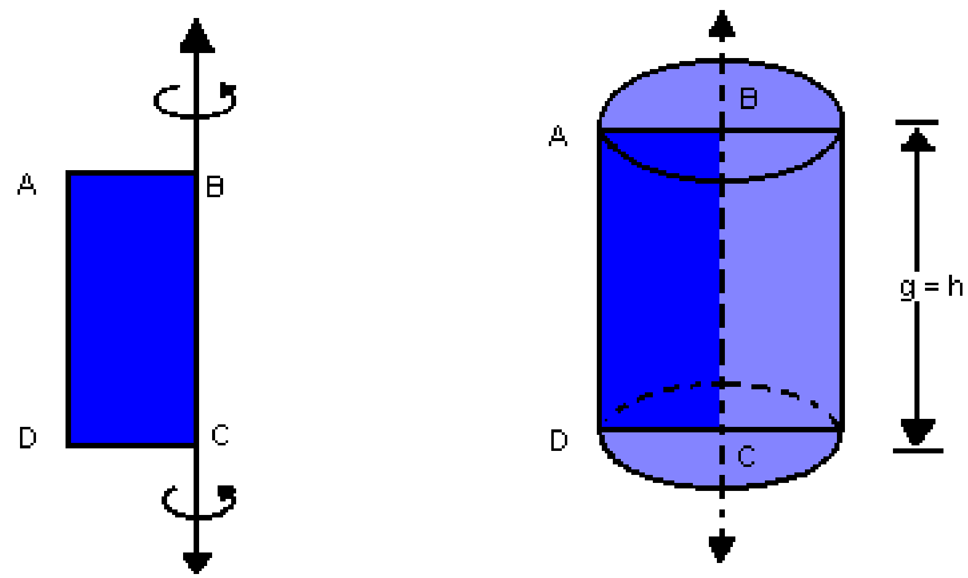
Um cilindro pode ser:

- circular oblíquo: quando as geratrizes são oblíquas às bases;
- circular reto: quando as geratrizes são perpendiculares às bases.

Veja:



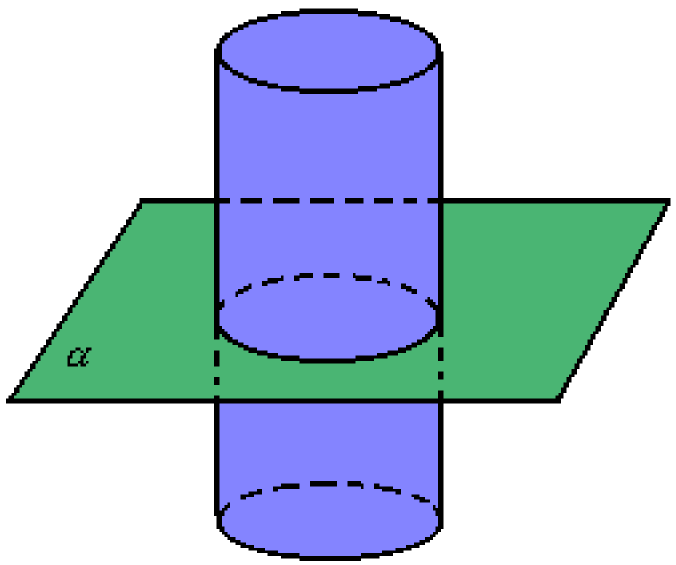
O cilindro circular reto é também chamado de cilindro de revolução, por ser gerado pela rotação completa de um retângulo por um de seus lados. Assim, a rotação do retângulo ABCD pelo lado $\overline{BC}$ gera o cilindro a seguir:



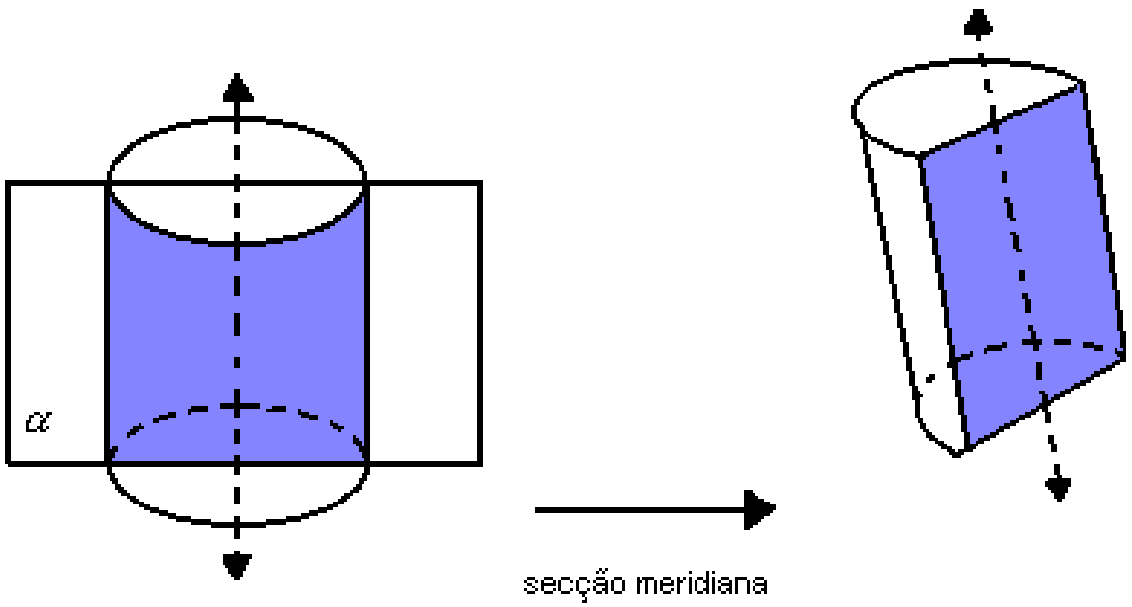
A reta $\overline{BC}$ contém os centros das bases e é o eixo do cilindro.

Secção

Secção transversal é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano paralelo às bases. Todas as secções transversais são congruentes.



Secção meridiana é a região determinada pela intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo.

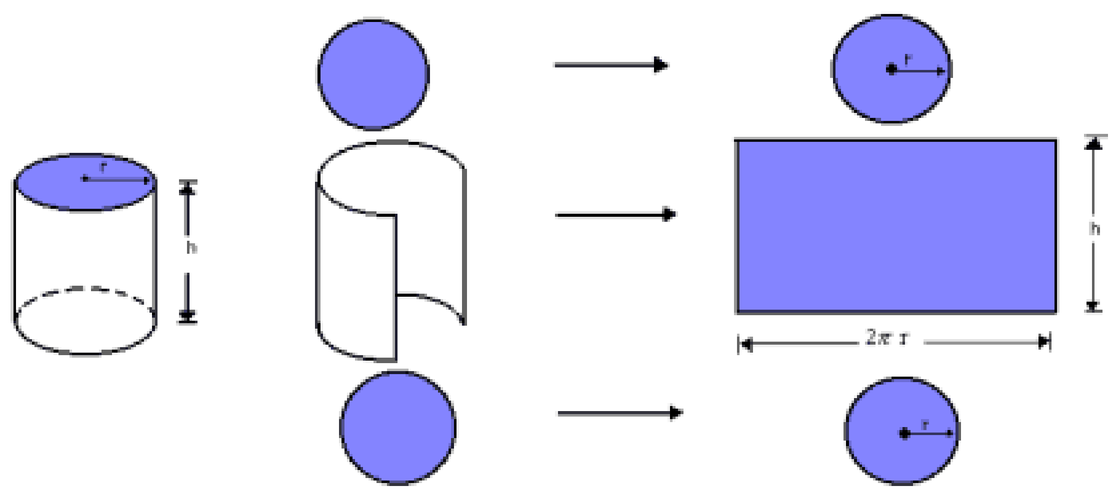


Áreas

Num cilindro, consideramos as seguintes áreas:

a) área lateral (A_L)

Podemos observar a área lateral de um cilindro fazendo a sua planificação:



Assim, a área lateral do cilindro reto cuja altura é h e cujos raios dos círculos das bases são r é um retângulo de dimensões 2π r e h:

$$\mathbf{A_L = 2\pi\ r\ h}$$

b) área da base (A_B): área do círculo de raio r

$$\mathbf{A_B = \pi r^2}$$

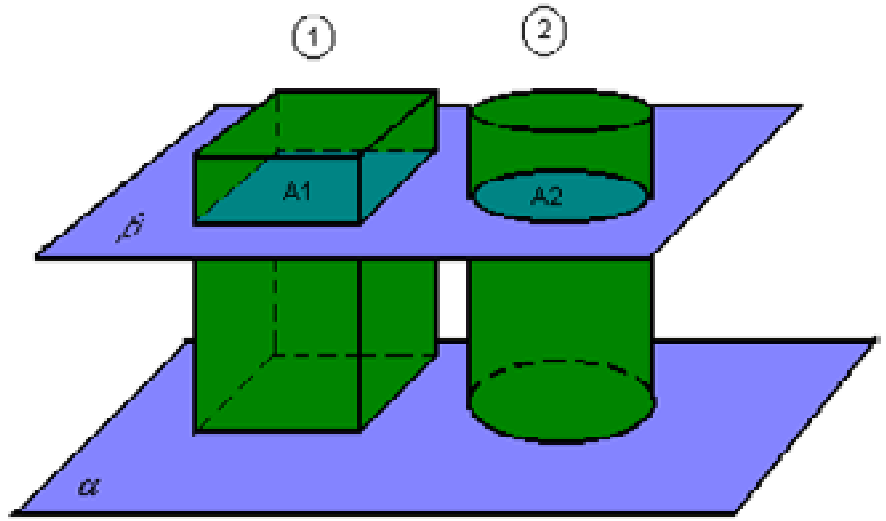
c) área total (A_T): soma da área lateral com as áreas das bases

$$\mathbf{A_T = A_L + 2A_B = 2\pi\ r\ h + 2\pi\ r^2 = 2\pi\ r\ (h+r)}$$

Volume

Para obter o volume do cilindro, vamos usar novamente o princípio de Cavalieri.

Dados dois sólidos com mesma altura e um plano α, se todo plano β, paralelo ao plano α, intercepta os sólidos e determina secções de mesma área, os sólidos têm volumes iguais:

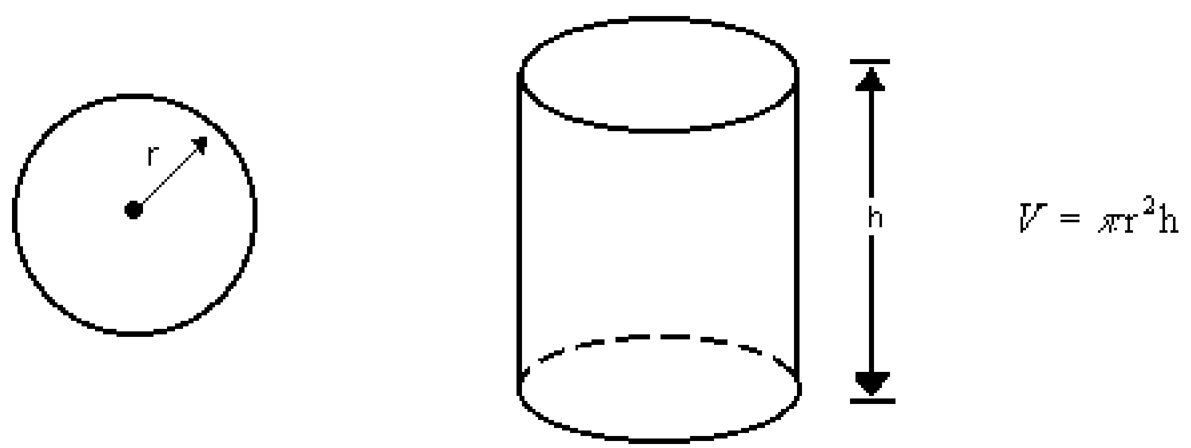


Se 1 é um paralelepípedo retângulo, então $V_2 = A_B h$.

Assim, o volume de todo paralelepípedo retângulo e de todo cilindro é o produto da área da base pela medida de sua altura:

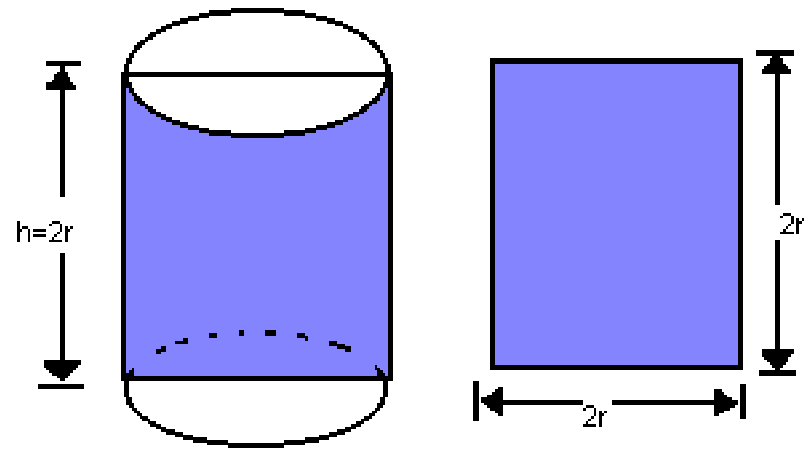
$$\mathbf{V_{cilindro} = ABh}$$

No caso do cilindro circular reto, a área da base é a área do círculo de raio r $A_B = \pi r^2$; portanto seu volume é:



Cilindro equilátero

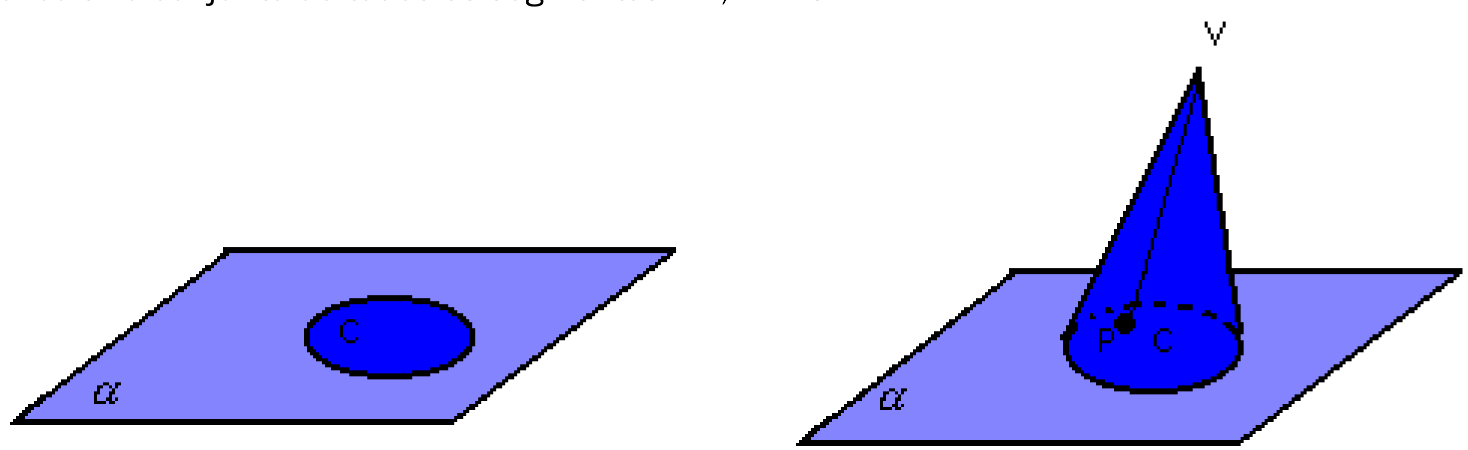
Todo cilindro cuja secção meridiana é um quadrado (altura igual ao diâmetro da base) é chamado cilindro equilátero.



$$A_L = 2r.2\pi r = 4\pi r^2$$
$$A_T = A_L + A_B = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$

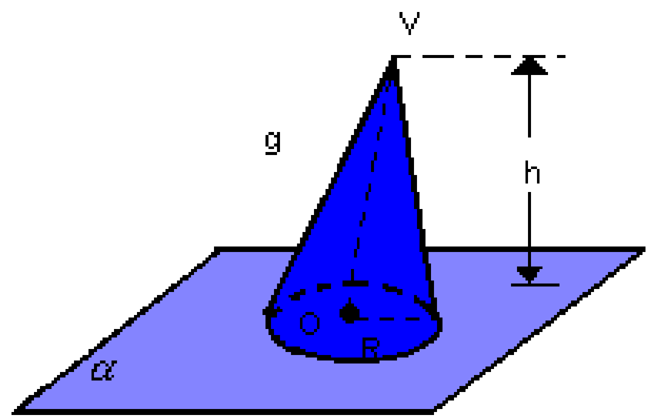
2.8 - Cone circular

Dado um círculo C, contido num plano , e um ponto V (vértice) fora de α, chamamos de cone circular o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}$, P ∈ C.



Elementos do cone circular

Dado o cone a seguir, consideramos os seguintes elementos:



Altura: distância h do vértice V ao plano α;

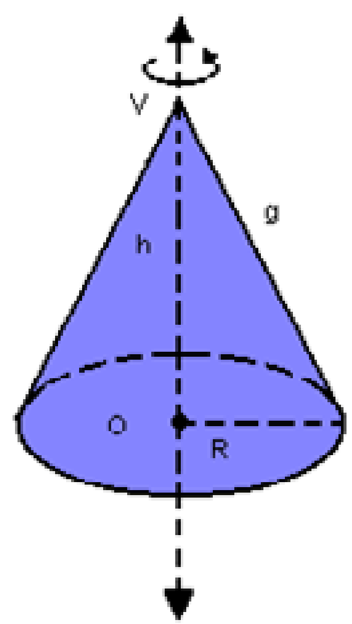
Geratriz (g): segmento com uma extremidade no ponto V e outra num ponto da circunferência;

Raio da base: raio R do círculo;

Eixo de rotação: reta $\overline{VO}$ determinada pelo centro do círculo e pelo vértice do cone.

Cone reto

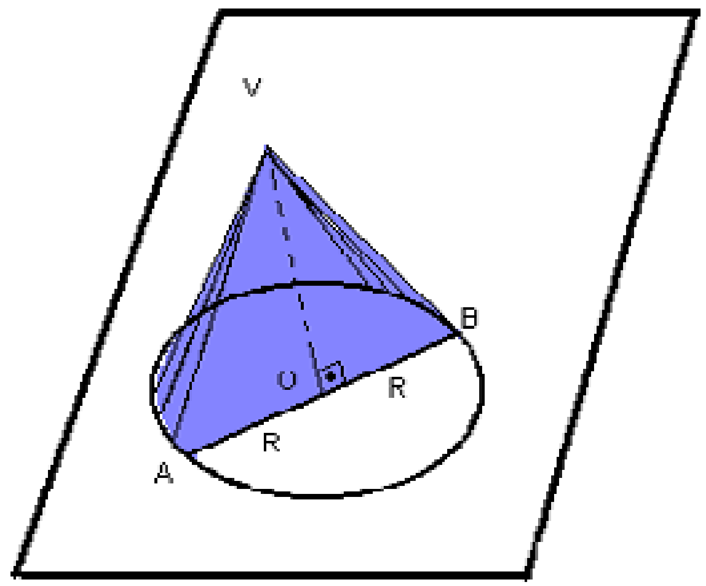
Todo cone cujo eixo de rotação é perpendicular à base é chamado cone reto, também denominado *cone de revolução*. Ele pode ser gerado pela rotação completa de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.



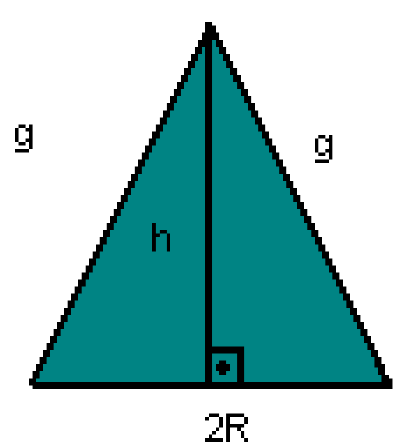
Da figura, e pelo Teorema de Pitágoras, temos a seguinte relação: $g_2 = h_2 + R_2$

Secção meridiana

A secção determinada, num cone de revolução, por um plano que contém o eixo de rotação é chamada secção meridiana.



Se o triângulo AVB for equilátero, o cone também será equilátero:

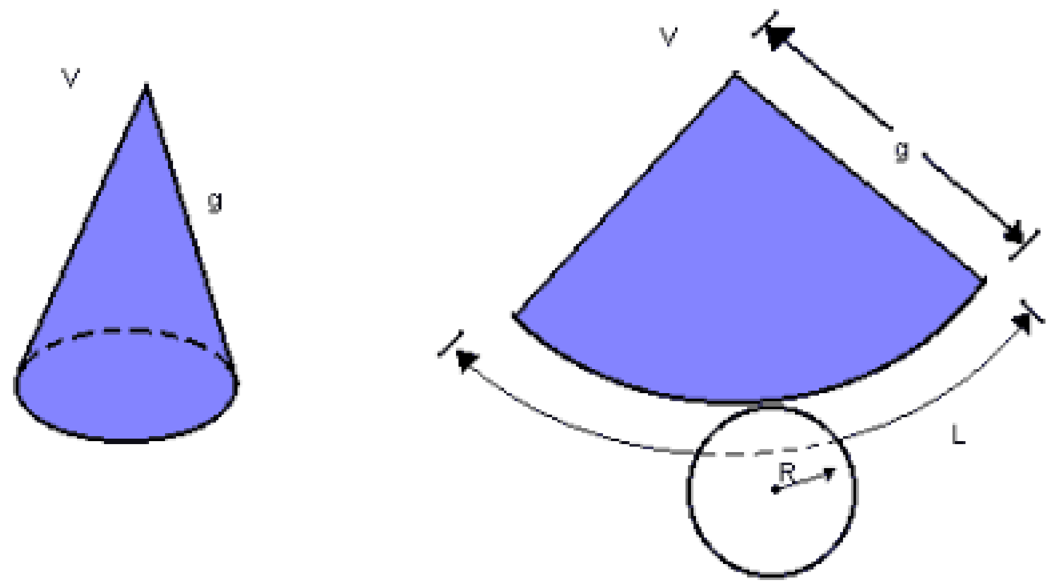


$$g = 2R$$

$$h = R\sqrt{3}$$

Áreas

Desenvolvendo a superfície lateral de um cone circular reto, obtemos um setor circular de raio g e comprimento $l = 2\pi r$:



Assim, temos de considerar as seguintes áreas:

a) área lateral (A_L): área do setor circular

$$A_L = \frac{gl}{2} = \frac{g.2\pi R}{2} \Rightarrow A_L = \pi R g$$

b) área da base (A_B): área do circulo do raio R

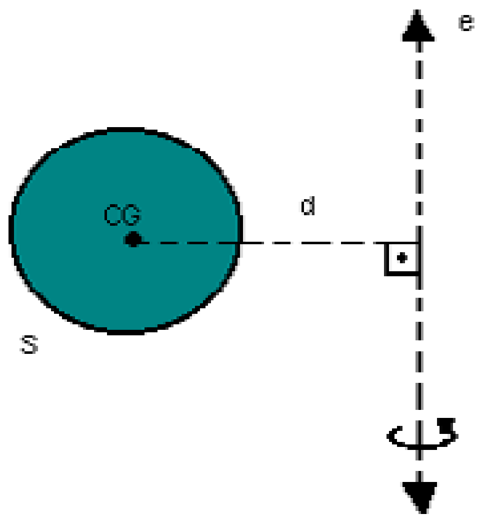
$$A_B = \pi R^2$$

c) área total (A_T): soma da área lateral com a área da base

$$A_T = A_L + A_B = \pi \mathrm{Rg} + \pi \mathrm{R}^2 \Rightarrow A_T = \pi R(g + R)$$

Volume

Para determinar o volume do cone, vamos ver como calcular volumes de sólidos de revolução. Observe a figura:



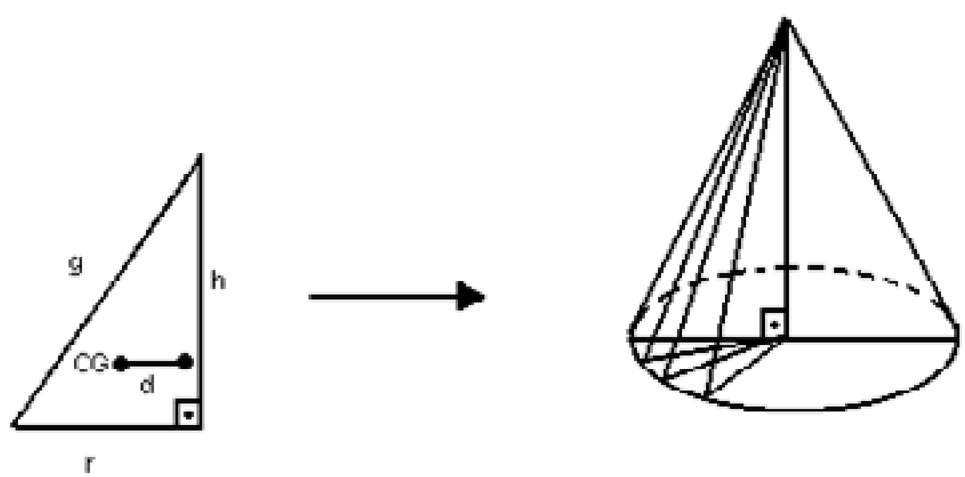
d = distância do centro de gravidade (CG) da sua superfície ao eixo e

S = área da superfície

Sabemos, pelo Teorema de Pappus - Guldin, que, quando uma superfície gira em torno de um eixo e, gera um volume tal que:

$$V = 2\,\pi\,dS$$

Vamos, então, determinar o volume do cone de revolução gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno do cateto h:



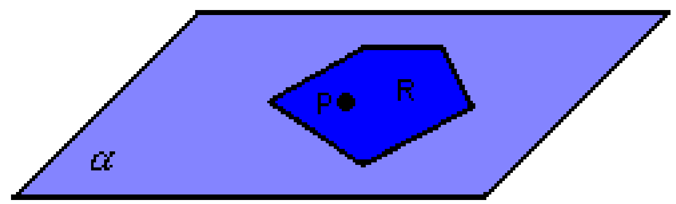
O CG do triângulo está a uma distância $d = \frac{r}{3}$ do eixo de rotação. Logo:

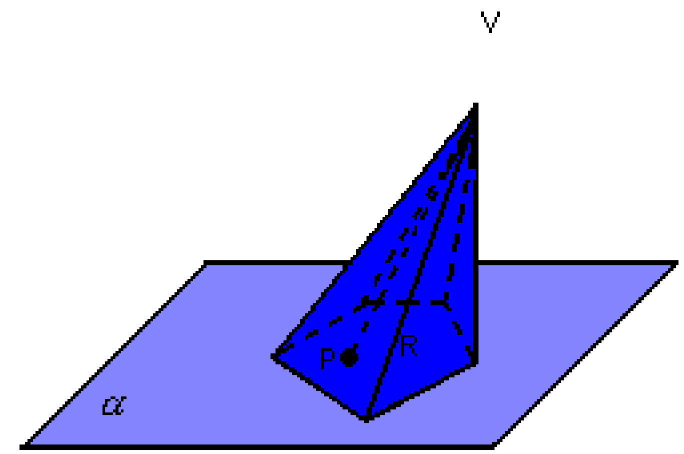
$$V_{cone} = 2\,\pi dS = 2\pi\,.\,\frac{r}{3}.\frac{rh}{2} \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3}.\pi\,r^2 h$$

2.9- Pirâmides

VÍDEO

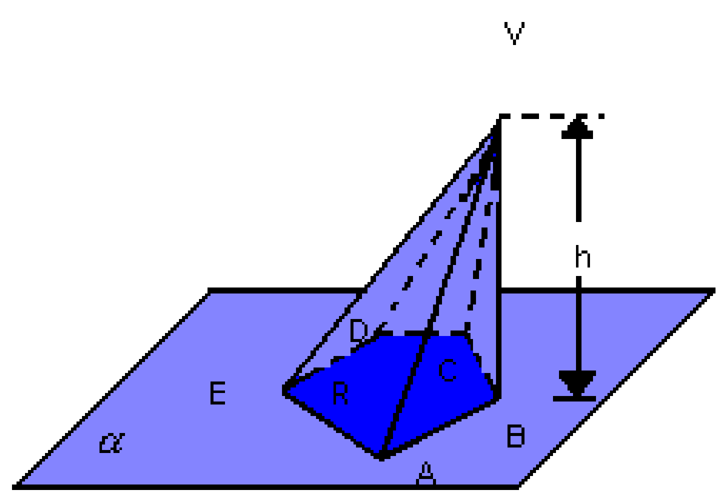
Dados um polígono convexo R, contido em um plano α, e um ponto V (vértice) fora de α, chamamos de pirâmide o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}$ = P ∈ R.





Elementos da pirâmide

Dada a pirâmide a seguir, temos os seguintes elementos:



Base: o polígono convexo R

Arestas da base: os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ do polígono.

Arestas laterais: os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$

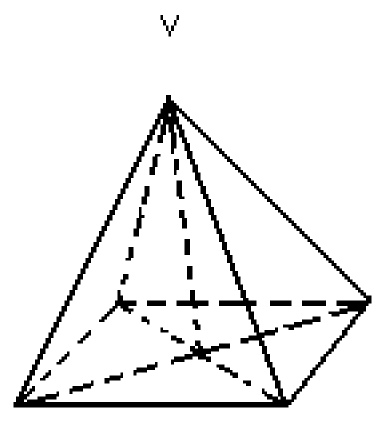
Faces laterais: os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEA

Altura: distância h do ponto V ao plano

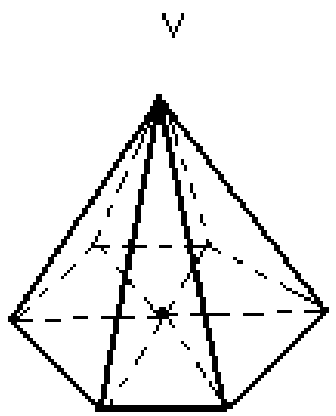
Classificação

Uma pirâmide é reta quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base.

Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, recebe o nome de pirâmide regular. Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.
Veja:



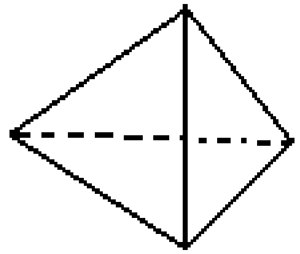
PIRÂMIDE REGULAR QUADRANGULAR



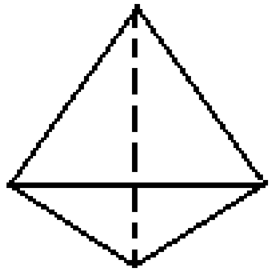
PIRÂMIDE REGULAR HEXAGONAL

Observações:

1ª) Toda pirâmide triangular recebe o nome do tetraedro. Quando o tetraedro possui como faces triângulos equiláteros, ele é denominado regular (todas as faces e todas as arestas são congruentes).

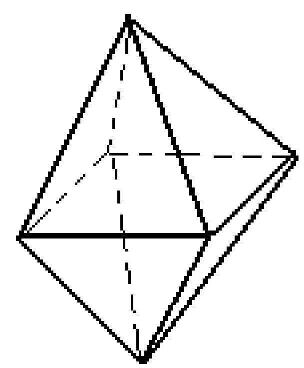


TETRAEDRO

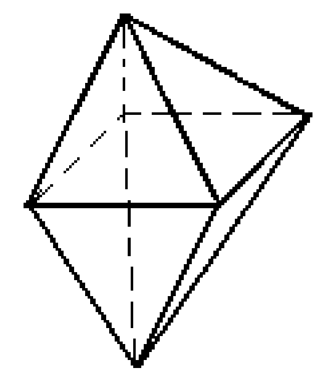


TETRAEDRO REGULAR

2ª) A reunião, base com base, de duas pirâmides regulares de bases quadradas resulta num octaedro. Quando as faces das pirâmides são triângulos equiláteros, o octaedro é regular.



OCTAEDRO

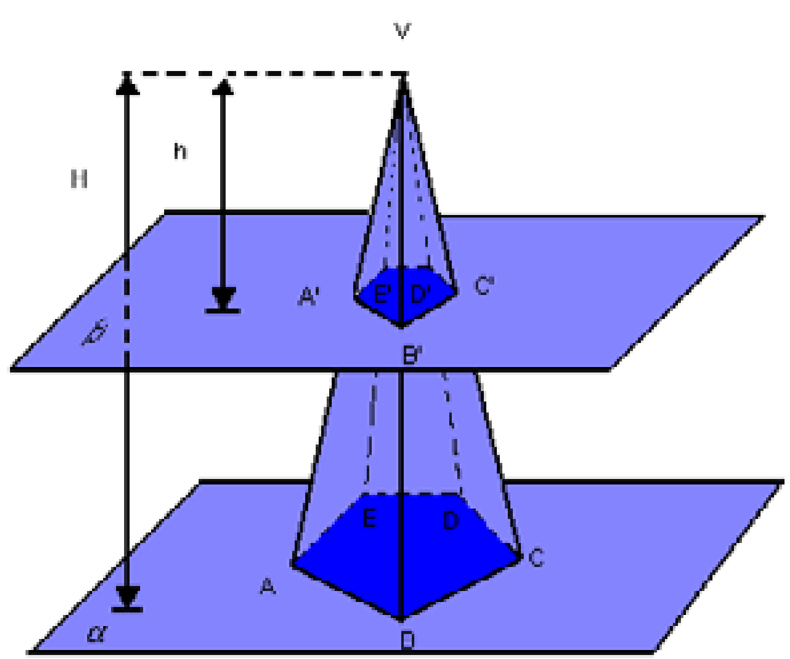


OCTAEDRO REGULAR

Secção paralela à base de uma pirâmide

Um plano paralelo à base que intercepte todas as arestas laterais determina uma secção poligonal de modo que:

- as arestas laterais e a altura sejam divididas na mesma razão;
- a secção obtida e a base sejam polígonos semelhantes;
- as áreas desses polígonos estejam entre si assim como os quadrados de suas distâncias ao vértice.

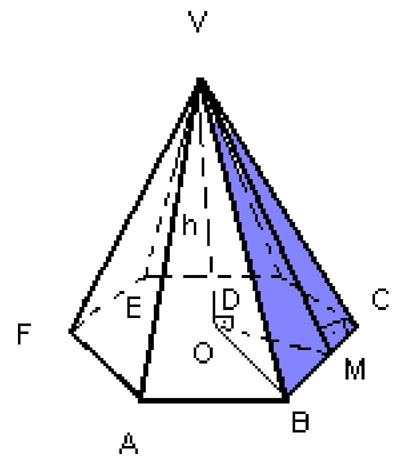


$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{VE'}{VE} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{\text{área } A'B'C'D'E'}{\text{área } ABCDE} = \frac{h^2}{H^2}$$

Relações entre os elementos de uma pirâmide regular

Vamos considerar uma pirâmide regular hexagonal, de aresta lateral l e aresta da base a:

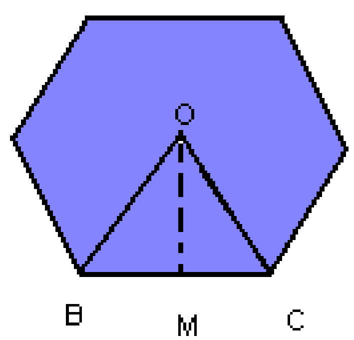


$$MC = \frac{a}{2}$$

$$h^2 = l^2 - a^2$$

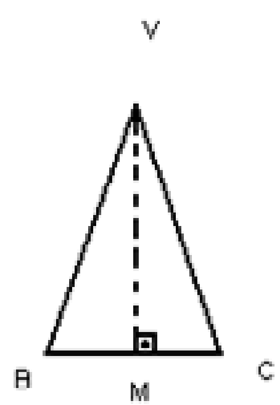
Assim, temos:

- A base da pirâmide é um polígono regular inscritível em um círculo de raio OB = R.



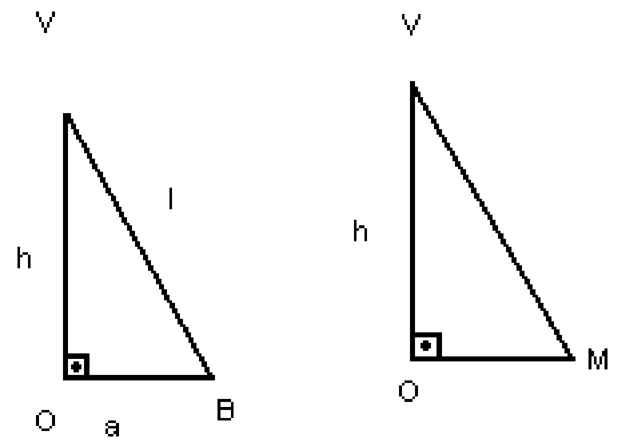
$$OM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (apótema da base)}$$

- A face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles.



$\overline{VM}$ é o apótema da pirâmide (altura de uma face lateral)

- Os triângulos VOB e VOM são retângulos.



Áreas

Numa pirâmide, temos as seguintes áreas:

a) área lateral (A_L): reunião das áreas das faces laterais

b) área da base (A_B): área do polígono convexo (base da pirâmide)

c) área total (A_T): união da área lateral com a área da base

$A_T = A_L + A_B$

Para uma pirâmide regular, temos:

$$A_L = n.\frac{bg}{2} \qquad A_B = pa$$

em que:

$$\begin{cases} b \text{ é a aresta} \\ \text{g é o apótema} \\ \text{n é o número de arestas laterais} \\ \text{p é o semiperímetro da base} \\ \text{a é o apótema do polígono da base} \end{cases}$$

Volume

O princípio de Cavalieri assegura que um cone e uma pirâmide equivalentes possuem volumes iguais:

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\pi R^2}_{\text{área da base}} h \rightarrow \boxed{V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\cdot A_B h}$$

2.10- Troncos

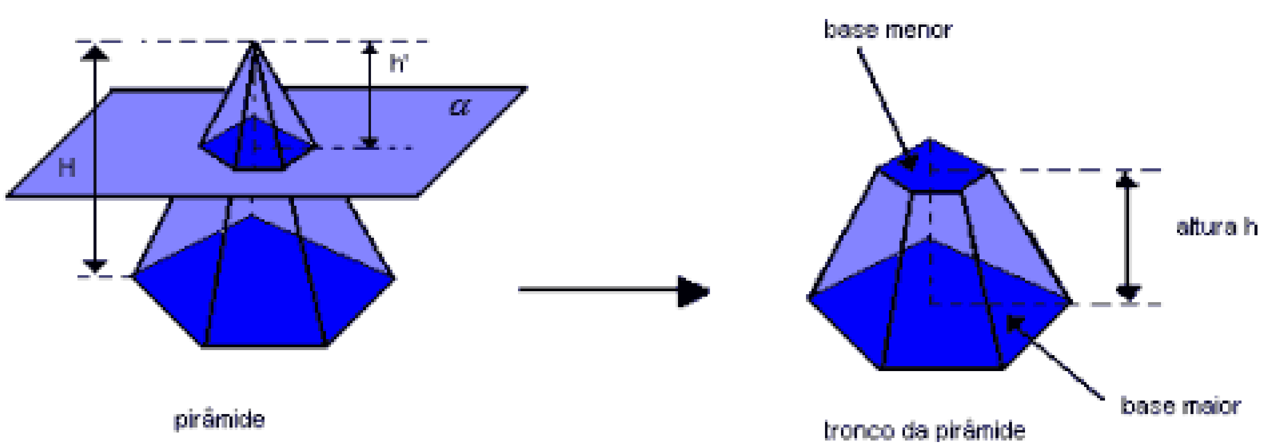
VÍDEO

Se um plano interceptar todas as arestas de uma pirâmide ou de um cone, paralelamente às suas bases, o plano dividirá cada um desses sólidos em dois outros: uma nova pirâmide e um tronco de pirâmide; e um novo cone e um tronco de cone.

Vamos estudar os troncos.

Tronco da pirâmide

Dado o tronco de pirâmide regular a seguir, temos:



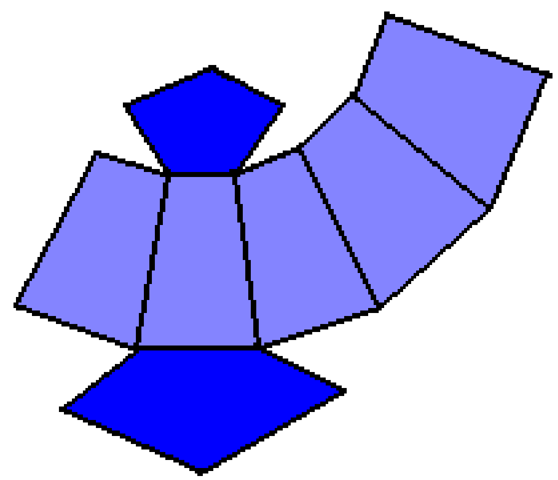
- as bases são polígonos regulares paralelos e semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles congruentes.

Áreas

Temos as seguintes áreas:

a) área lateral (A_L): soma das áreas dos trapézios isósceles congruentes que formam as faces laterais

b) área total (A_T): soma da área lateral com a soma das áreas da base menor (A_b) e maior (A_B)



$$A_T = A_L + A_B + A_b$$

Volume

O volume de um tronco de pirâmide regular é dado por:

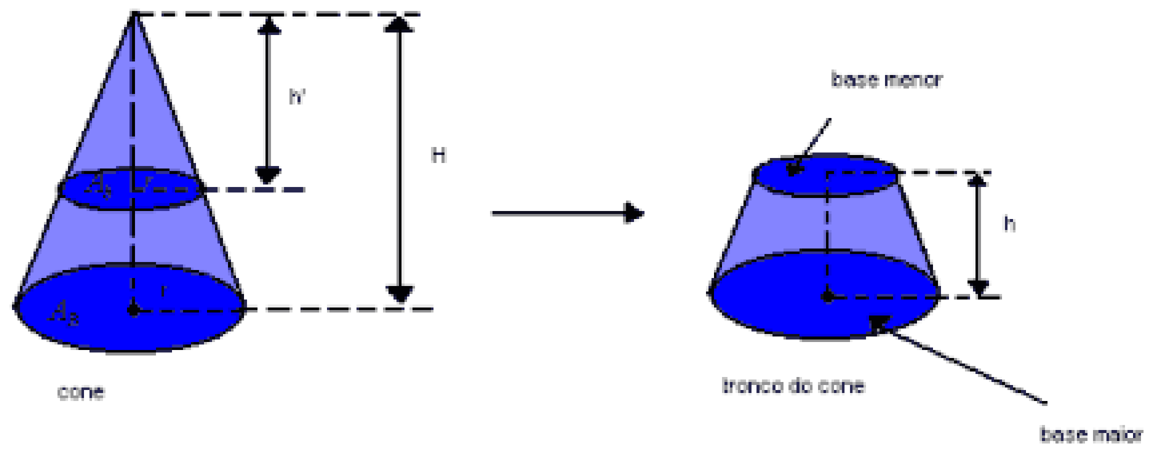
$$V_T = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}\right)$$

Sendo V o volume da pirâmide e V' o volume da pirâmide obtido pela secção é válida a relação:

$$\frac{V}{V} = \left(\frac{h'}{H}\right)^3$$

Tronco do cone

Sendo o tronco do cone circular regular a seguir, temos:

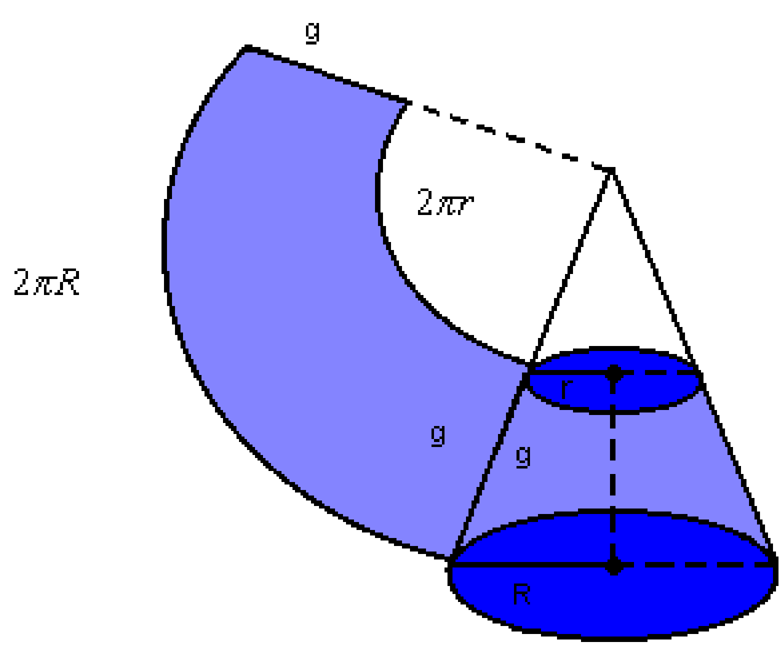


- as bases maior e menor são paralelas;
- a altura do tronco é dada pela distância entre os planos que contém as bases.

Áreas

Temos:

a) área lateral



$A_L = \pi (R + r) g$

b) área total

$$A_T = A_L + A_B + A_b = \pi(R+r)g + \pi R^2 + \pi r^2 \Rightarrow A_T = \pi[(R+r)g + R^2 + r^2]$$

Volume

$$V = \frac{h}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B A_b}) = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2}) \Rightarrow V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

Sendo V o volume do cone e V’ o volume do cone obtido pela secção são válidas as relações:

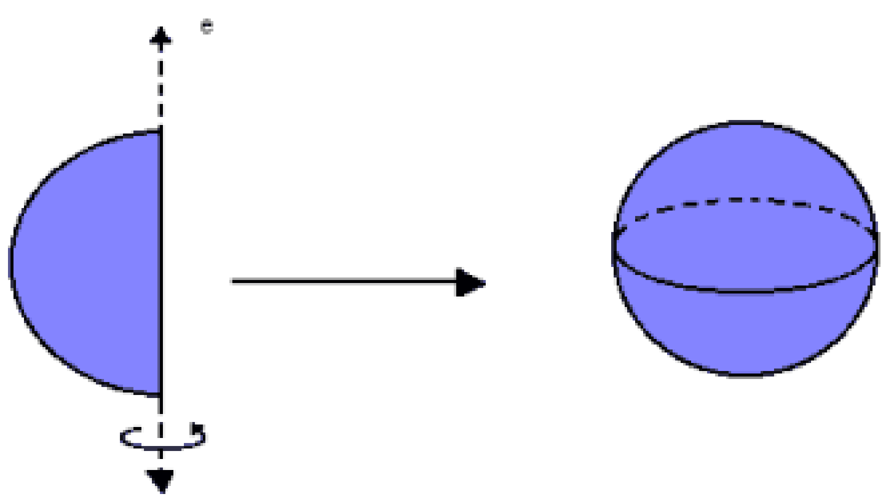
$$\frac{r}{r'} = \frac{H}{h'} \qquad \frac{A_B}{A_b} = \left(\frac{H}{h'}\right)^2 \qquad \frac{V}{V'} = \left(\frac{H}{h'}\right)^3$$

2.11- Esfera

VÍDEO

Chamamos de esfera de centro O e raio R o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio R.

Considerando a rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo e, a esfera é o sólido gerado por essa rotação. Assim, ela é limitada por uma superfície esférica e formada por todos os pontos pertencentes a essa superfície e ao seu interior.



Volume

O volume da esfera de raio R é dado por:

$V_e = \frac{4}{3} \pi R^3$

3 - Considerações finais

O estudo da geometria espacial é muito interessante e pode ser utilizado como aplicação utilizando por exemplo material reciclável que é de fácil aquisição. Além disto, pode-se trabalhar com origami, na parte computacional como GeoGebra, entre outras aplicações. Esperamos que o material ajude a tirar dúvidas não deixe de assistir aos vídeos sugeridos, pois compõem atividade e a explicação é de fácil compreensão.

Obrigada pela consulta ao material,

Prof. Jotair Kwiatkowski Jr

Prof. Maria Regina C. M. Lopes

4 - Referências

Manoel Paiva. Volume Único, Ed. Moderna, 2. ed. São Paulo, 2003.

Coleção Novos Horizontes - Matemática volume único, 2000;

http://www.somatematica.com.br/ acessado em: 23-09-2015;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler acessado em: 25-09-2015;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci acessado em: 25-09-2015;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras acessado em: 26-09-2015;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides acessado em: 26-09-2015;

https://pt.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler acessado em: 26-09-2015;

http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Fundamentos_de_geometria_espacial-sergio-02.pdf acessado em: 02-10-2015;