FUNÇÕES ELEMENTARES

Angelo Miguel Malaquias

Caros alunos

Esse ebook é um pdf interativo. Para conseguir acessar todos os seus recursos, é recomendada a utilização do programa *Adobe Reader 11*.

Caso não tenha o programa instalado em seu computador, segue o link para download:

http://get.adobe.com/br/reader/

Para conseguir acessar os outros materiais como vídeos e sites, é necessário também a conexão com a internet.

O menu interativo leva-os aos diversos capítulos desse ebook, enquanto a barra inferior pode lhe redirecionar ao índice ou às páginas anteriores e posteriores.

Nesse pdf, o professor da disciplina, através de textos próprios ou de outros autores, tece comentários, disponibiliza links, vídeos e outros materiais que complementarão o seu estudo.

Para acessar esse material e utilizar o arquivo de maneira completa, explore seus elementos, clicando em botões como flechas, linhas, caixas de texto, círculos, palavras em destaque e descubra, através dessa interação, que o conhecimento está disponível nas mais diversas ferramentas.

Boa leitura!

Para uma melhor visualização, consultar este material no modo tela cheia. (Ctrl+L)

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO

Prezados

Este material complementar tem por objetivo apresentar e oferecer um direcionamento sobre três assuntos interessantes a um professor de matemática, cuja abordagem foi motivada pelos tópicos que compõem a disciplina Funções Elementares. Uma breve descrição do que será visto é apresentada a seguir:

1. **Experimentos práticos.** Existe um repositório da Unicamp, disponível livremente na internet, com uma grande quantidade de materiais direcionados ao ensino. Em particular, tem uma seção direcionada a experimentos práticos envolvendo matemática. Aqui, serão apresentados três dos experimentos lá disponíveis.

2. **Relações e funções.** Trata-se de uma pequena exposição sobre relações e funções, com o objetivo de deixar mais claro, do ponto de vista matemático, as diferenças entre estas duas ideias. Uma vez que foram comentadas, na primeira unidade do livro da disciplina, mais do ponto de vista intuitivo.

3. **Edição de textos com o Latex**. Na quarta unidade do livro da disciplina, vimos que o software Geogebra é interessante para a criação de aplicativos envolvendo matemática. Quando o assunto é a edição de textos matemáticos, um recurso computacional extremamente utilizado é o Latex. No entanto, como seu aprendizado é mais demorado em comparação a programas como o Microsoft Word, muitos ainda não o conhecem e nem sabem como é seu funcionamento. Portanto, nessa seção, será realizada uma breve apresentação do software e um direcionamento para aqueles que quiserem aprendê-lo.

Observação: No repositório comentado há diversos vídeos relacionados à matemática. Fica como sugestão o vídeo sobre logaritmos: “A aparição” .

Bom curso a todos!
Prof. Angelo Miguel Malaquias

EXPERIMENTOS PRÁTICOS

NOTAS

Entre outras coisas, o curso Matemática na Prática, como o próprio nome sugere, procura mostrar a possibilidade do desenvolvimento de atividades do ponto de vista prático ou experimental. Embora no livro da disciplina Funções Elementares sejam comentados alguns experimentos envolvendo matemática, há diversos outros também interessantes e bons materiais disponibilizados livremente na internet para serem explorados.

Existe um repositório da Unicamp com recursos multimídia para a matemática do ensino médio, com videoaulas e experimentos que envolvem matemática. Esses materiais são disponibilizados segundo a licença *Creative Commons* - é permitido copiar, distribuir, exibir, executar a obra e criar obras derivadas, mas não é permitido o uso comercial ou o relicenciamento sobre uma licença mais restritiva. Na sequência, serão apresentados três dos experimentos lá disponíveis.

Primeiro experimento: A altura da árvore

Distâncias inacessíveis, como a largura de um rio ou altura de um prédio, podem ser medidas utilizando aparelhos denominados teodolitos (https://pt.wikipedia.org/wiki/Teodolito). Com um canudinho, um transferidor e um fio de prumo é possível construir um tipo de teodolito, medidor de ângulos, e utilizá-lo para apresentar experimentalmente a noção de tangente no triângulo retângulo, medindo a altura de uma árvore.

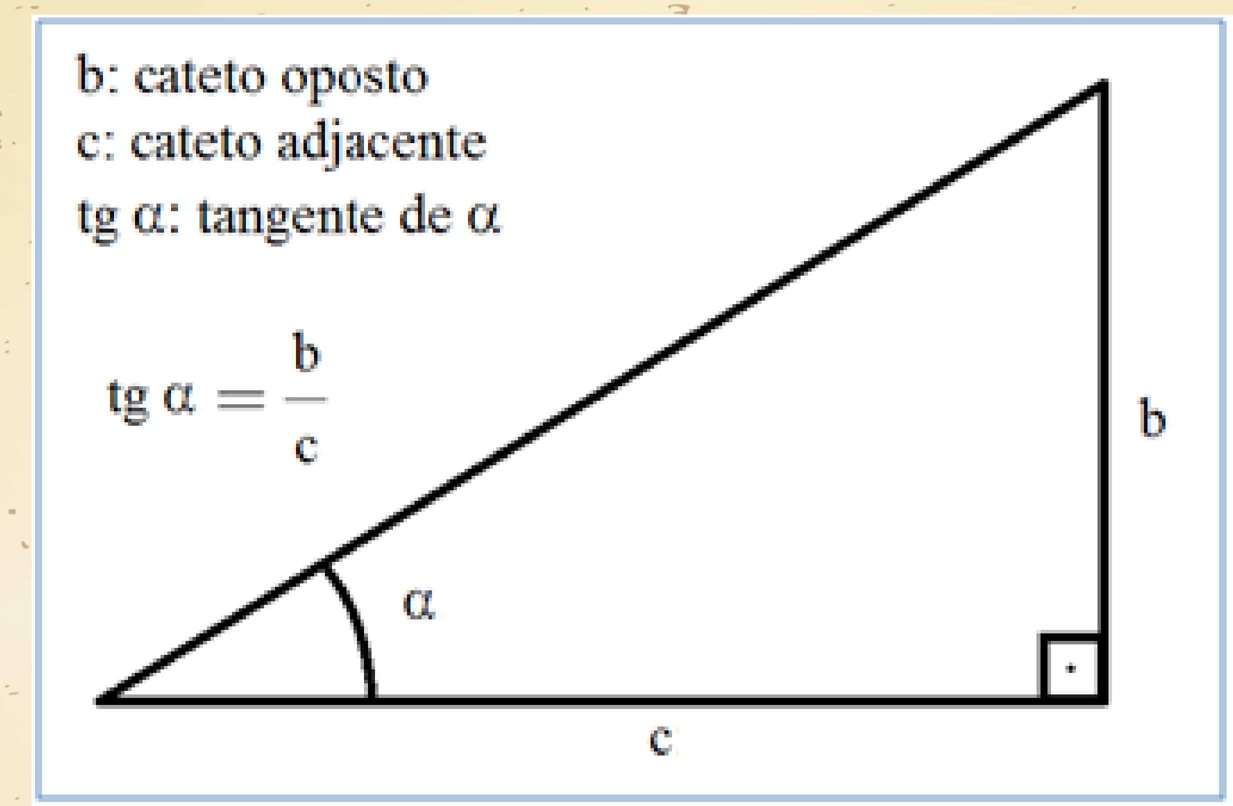
Figura 1: O medidor de ângulos

Fonte: Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:experimento

NOTAS

A tangente de um ângulo agudo, α, num triângulo retângulo é definida como a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a α.

Figura 2: Tangente de um ângulo agudo num triângulo retângulo



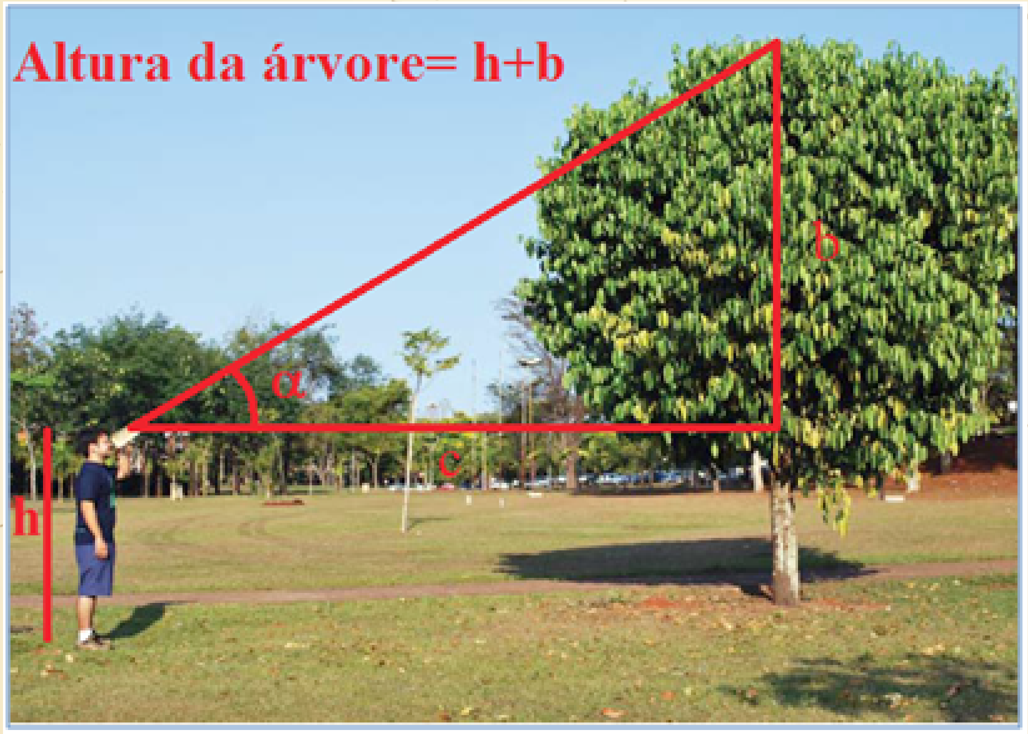
Fonte: Autoria própria.

Sendo c o cateto adjacente ao ângulo α e b o cateto oposto, uma vez conhecida a medida de c e o valor de $tg\alpha$, da expressão $tg\alpha = b/c$, é possível determinar a medida de b apenas multiplicando c por $tg\alpha$. Ou seja, $b = c \cdot tg\alpha$.

NOTAS

Se c representa a distância de um observador a uma árvore e α o ângulo de visualização de seu topo, resulta que a altura da árvore é igual à altura do observador, representada pela letra h mais a medida b, que corresponde ao cateto oposto a um ângulo agudo α em um triângulo retângulo, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3: A altura da árvore



Fonte: Adaptado de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:experimento

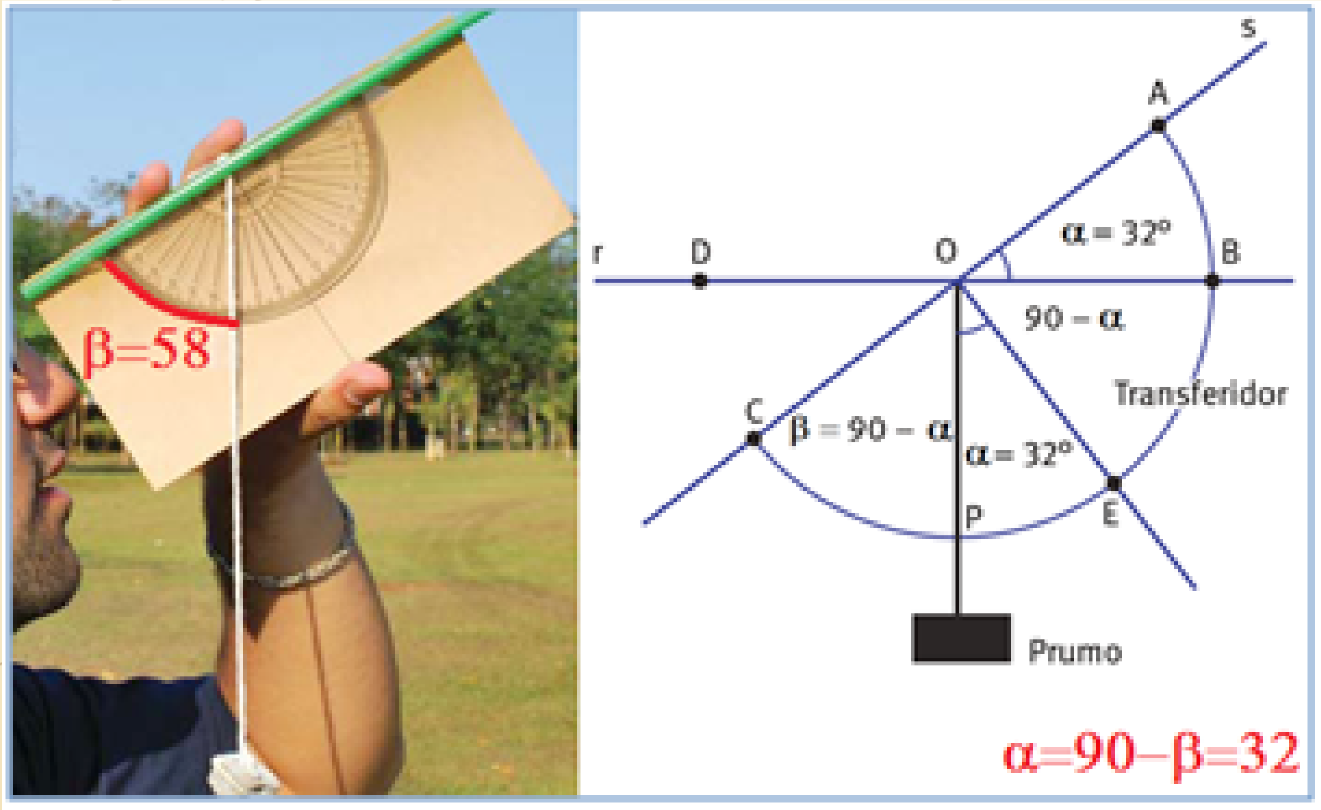
Então, para o cálculo da altura da árvore basta conhecer o valor do ângulo α, a altura h do observador e a distância c.

NOTAS

ÍNDICE

Para determinar o ângulo de visualização, α, utiliza-se o medidor de ângulos citado anteriormente e relações de simetria. Enquanto alguém observa o topo da árvore, outra pessoa pode anotar o menor ângulo, β, em relação ao fio de prumo. Se, por exemplo, o ângulo β é 58º, então, de $\beta = 90 - \alpha$, resulta que $\alpha = 90 - \beta = 90 - 58 = 32$. Logo, α = 32º. Na Figura 4 encontra-se ilustrado um ângulo β que pode ser anotado enquanto o observador focaliza o topo da árvore e relações de simetria que permitem a determinação de α.

Figura 4: Determinação do ângulo α

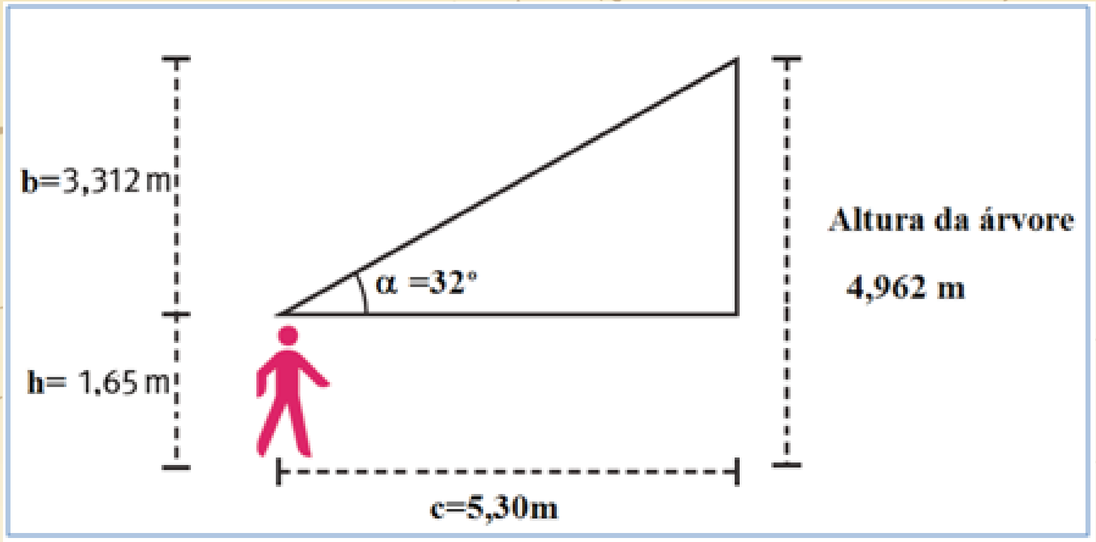


Fonte: Adaptado de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:experimento

NOTAS

Se a altura do observador é h = 1,65 m, α = 32º, e c = 5,30 m, então, de $b = c \cdot tg\alpha$, obtém-se b = 3,312 m e, consequentemente, a altura da árvore será: $h + b$ = 4,962 m.

Figura 5: Esquema com a altura da árvore e valor



Fonte: Adaptado de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio[1] http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:experimento

Diversas atividades podem ser desenvolvidas durante esse experimento intitulado "Altura da árvore". Aqui foi descrita apenas a ideia central, que também poderia ser utilizada para determinar a altura de algum outro ponto de difícil acesso, como o topo de um poste ou teto de um ginásio de esportes. No site Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio é possível obter um pacote completo, contendo um roteiro para a realização do experimento, com arquivos e ilustrações que descrevem passo a passo como realizá-lo. Não deixe de consultar, pois são bons materiais disponíveis livremente!

NOTAS

Segundo experimento: A Matemática dos Calendários

Esse experimento instiga a compreensão da matemática envolvida no calendário contemporâneo, conhecido como calendário Gregoriano. A atividade central do experimento consiste em determinar em que dia da semana foi determinada data. Com isso, é possível compreender e aplicar algoritmos e também revisar o uso de operações básicas.

Para responder, por exemplo, em que dia da semana você nasceu (sem usar um computador ou algum aplicativo) é preciso compreender as regras utilizadas para anos bissextos, com 366 dias, e anos normais, com 365 dias. As regras são mais do que apenas "anos múltiplos de 4 são bissextos". Na realidade, anos bissextos são múltiplos de 4, mas nem todo ano múltiplo de 4 é bissexto. Anos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400 são múltiplos de 4, mas não são bissextos.

Regras do Calendário Gregoriano

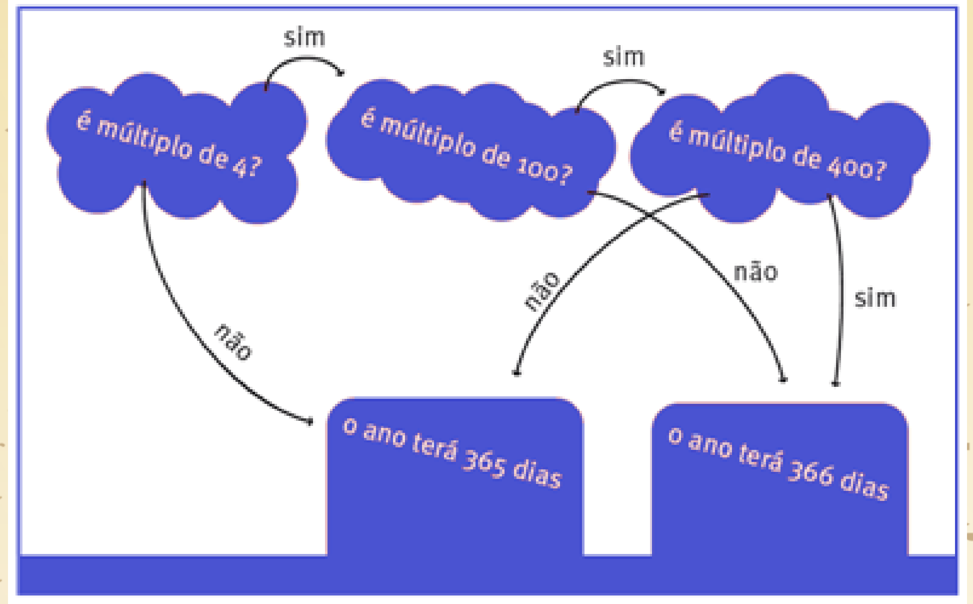
- Anos múltiplos de 4 que não são múltiplos de 100 são bissextos;
- Anos múltiplos de 400 são bissextos;
- Os demais anos são normais.

Observe que, de acordo com as regras, os dois casos em que os anos são bissextos (duas primeiras regras), necessariamente, correspondem a anos múltiplos de 4. Portanto, se o ano não for múltiplo de 4, então de imediato conclui-se que não é bissexto. Por outro lado, se o ano for múltiplo de 100, mesmo sendo múltiplo de 4, será bissexto somente se for divisível por 400. A Figura 5 ilustra um algoritmo que resume as regras apresentadas.

NOTAS

ÍNDICE

Figura 6: Algoritmo de funcionamento do Calendário Gregoriano



Fonte: Adaptado de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio . http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:experimento

Com base nas regras anteriores, dentre os anos a seguir, quais são bissextos?

1831: Não é múltiplo de 4. Portanto, não é bissexto

1822: Não é múltiplo de 4. Então, não é bissexto.

1824: É múltiplo de 4 e não é múltiplo de 100. É bissexto.

1100: É múltiplo de 100, mas não é múltiplo de 400. Logo, não é bissexto.

1200: É múltiplo de 400. Portanto é bissexto.

2016: É múltiplo de 4 e não é múltiplo de 100. Então é bissexto.

Como determinar que dia da semana foi determinada data escolhida? Por exemplo, 10 de setembro de 1978. Para responder à pergunta, basta executar o seguinte algoritmo:

NOTAS

(1) Olhe no calendário do ano atual em qual dia da semana ocorrerá a data escolhida.

(2) Calcule a diferença entre o ano atual e o ano da data escolhida.

(3) Conte quantos anos bissextos aconteceram entre o ano atual e o ano da data escolhida.

(4) Para determinar quantos dias se passaram, multiplique o resultado obtido em (2) por 365 e adicione o número de anos bissextos obtido em (3), pois cada ano bissexto aumenta um dia em fevereiro.

(5) Como uma semana possui 7 dias, divida o resultado do item anterior por sete e considere o resto da divisão.

(6) Para finalizar, retroceda a partir do dia da semana obtido em (1) o número de dias correspondentes ao resto da divisão realizada em (5).

Seguindo o algoritmo, para 10 de setembro de 1978, tem-se:

(1) Quinta-feira.

(2) 2015-1978 = 37.

(3) 2012-1980 = 32 (diferença entre o último ano bissexto, antes do ano corrente, e o primeiro ano bissexto desde a data escolhida). Para saber quantos anos bissextos aconteceram entre o ano atual e o ano da data escolhida, basta fazer 32/4+1 = 9.

(4) 37 X 365 + 9 = 13514.

(5) O resto da divisão de 13514 por 7 é 4.

(6) Portanto, retrocedendo 4 dias a partir de quinta, conclui-se que 10 de setembro de 1978 foi um domingo.

NOTAS

Embora aqui simplesmente foi descrito um algoritmo, é interessante que antes de apresentá-lo seja solicitado que os estudantes pensem sobre o problema e tentem chegar a uma conclusão de como obter uma resposta. Para uma descrição detalhada de como o experimento pode ser realizado e das demais atividades relacionadas a ele, consultar “A Matemática dos Calendários”. Além de serem disponibilizados materiais para os alunos, também é fornecido um guia para o professor, comentando um pouco mais sobre a matemática envolvida e também fatos históricos. O assunto possui vários aspectos que despertam a curiosidade de um aluno, como, por exemplo, descobrir o dia da semana em que ele nasceu e aprender o porquê dos anos com 366 dias (anos bissextos) ou 365 dias (anos normais).

Sugestão de vídeo relacionado ao exposto nesta seção: “Desvendando o calendário”.

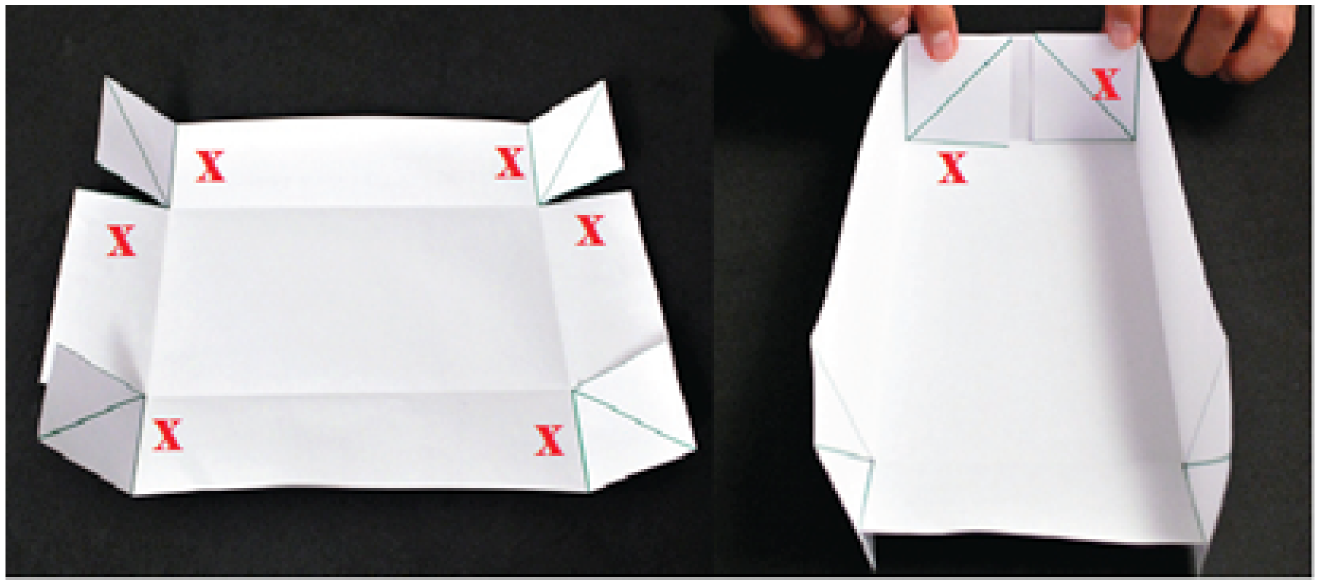
NOTAS

Terceiro experimento: Caixa de papel

Construir caixas, recipientes, embalagens ou mesmo automóveis de maneira a aproveitar bem o material utilizado, obtendo o maior volume ou espaço possível com quantidades de materiais fixas é assunto de interesse constante de indústrias.

O problema estudado nesse experimento consiste em obter as dimensões de uma caixa, construída como na Figura 6, de maneira que o volume seja máximo.

Figura 7: Construção de uma caixa sem tampa com folha A4

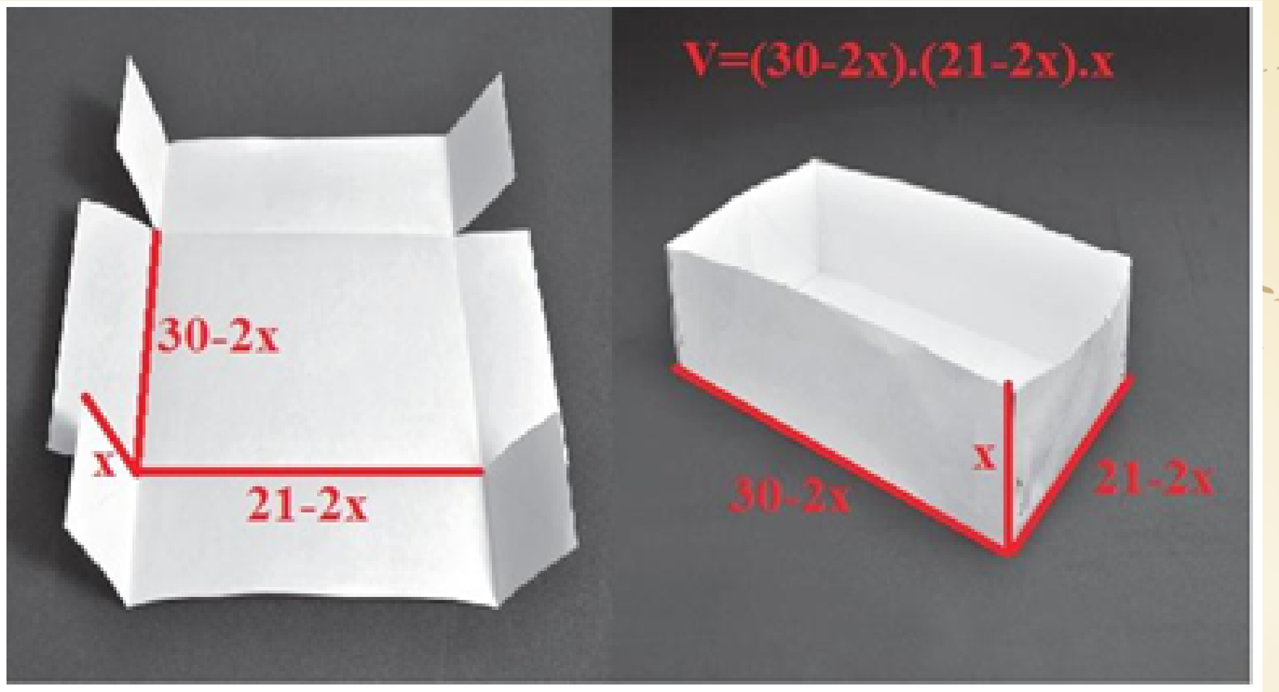


Fonte: Adaptado de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio 1.

NOTAS

Se considerarmos um retângulo com lados 21 cm e 30 cm (aproximadamente as dimensões de uma folha de A4), o volume da caixa construída será dado em função da medida x pela expressão V=(30-20x).(21-2x).x (Veja figura 8).

Figura 8: Volume da caixa



Fonte: Adaptado de Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio 1.

Como 30-2x, 21-2x e x devem assumir valores positivos, pois correspondem às medidas dos lados da caixa, segue que

$0 < 21-2x$, $0 < 30-2x$ e $0 < x$

Isto equivale a dizer:

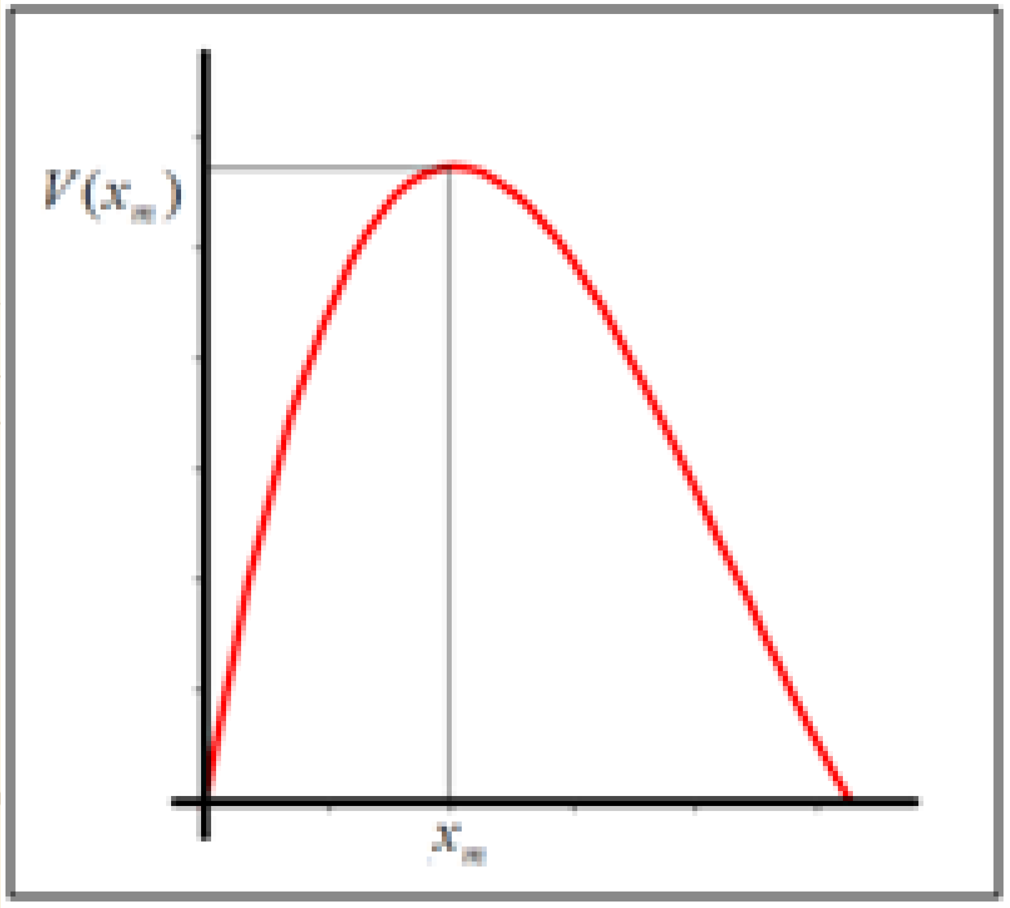
$0 < x < 10{,}5$ e $0 < x < 15$

NOTAS

ÍNDICE

Portanto, para que as duas desigualdades sejam satisfeitas, resulta que x é um valor tal que 0 < x < 10,5. Nesse intervalo, o gráfico da função V=(30-20x).(21-2x).x tem o aspecto ilustrado na Figura 9, na qual observa-se a existência de um valor x_m em que V assume o maior valor, dado por $V(x_m)$.

Figura 9: Volume máximo atingido em x_m.



Fonte: Autoria própria.

A ideia com o experimento é desenvolver atividades como

NOTAS

ÍNDICE

a construção de caixas de papel com folhas de A4, cálculos de volumes, e gráficos, a fim de chegar ao valor x_m e assim determinar as dimensões da caixa com maior volume. Nesse caso, por meio de atividades a serem desenvolvidas, chega-se à conclusão de que x_m é aproximadamente 4. Consequentemente, substituindo x por 4 em 30-2x, 21-2x e x, obtém-se que as dimensões da caixa são: 22 cm, 13 cm e 4 cm.

NOTAS

Para acessar os arquivos com os tópicos Relações e funções e Edição de textos com o LaTEX clique nos ícones a seguir:

Relações e funções

Edição de textos com o LaTEX

NOTAS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O material aqui apresentado foi pensado no sentido de expor alguns assuntos interessantes que podem ser abordados com os alunos ou serem úteis a um professor de matemática. Em particular, para quem deseja fazer mestrado na área de Matemática pura ou Aplicada, ou mesmo em departamentos de engenharia, fica como sugestão: Aprenda LaTEX!

Agradeço pela consulta a esse material e espero que tenha sido útil a você.

Prof. Angelo Miguel Malaquias

REFERÊNCIAS

IEZZI, G., MURAKAMI, C. Fundamentos de Matemática Elementar - 1: Conjuntos e Funções. São Paulo, Editora Atual,1977.

ANDRADE, L. N. Breve introdução ao LaTeX2e. Disponível em http://www.lce.esalq.usp.br/clarice/Paraiba.pdf. Acesso em 1 de setembro de 2013.

GOOSSENS, M. et al. The LaTeX Companion. 2 ed. Adilson Wesley, 2004.

OETIKER, T. et al. Introdução ao LaTEX2e. Disponível em http://repositorios.cpai.unb.br/ctan/info/lshort/portuguese-BR/lshortBR.pdf. Acesso em 19 de agosto de 2015.

PAKINS. S. The Comprehensive LATEX Symbol List. Disponível em http://repositorios.cpai.unb.br/ctan/info/symbols/comprehensive/symbols-a4.pdf. Acesso em 1 de setembro de 2013.

Recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio. UNICAMP. Disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/midia:experimento

SODRÉ, U. et al. Latex Básico com TeXnicCenter. Disponível em http://pt.scribd.com/doc/79277830/Mini-Latex-2011. Acesso em 1 de setembro de 2013.

T. TANTAU. Tikz e PGF. Disponível em http://linorg.usp.br/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf. Acesso em 1 de setembro de 2013.

T. TANTAU. The Beamer Cass: User Guide for version 3.26. Disponível em http://tug.ctan.org/macros/latex/contrib/beamer/doc/beameruserguide.pdf. Acesso em 19 de setembro de 2015.