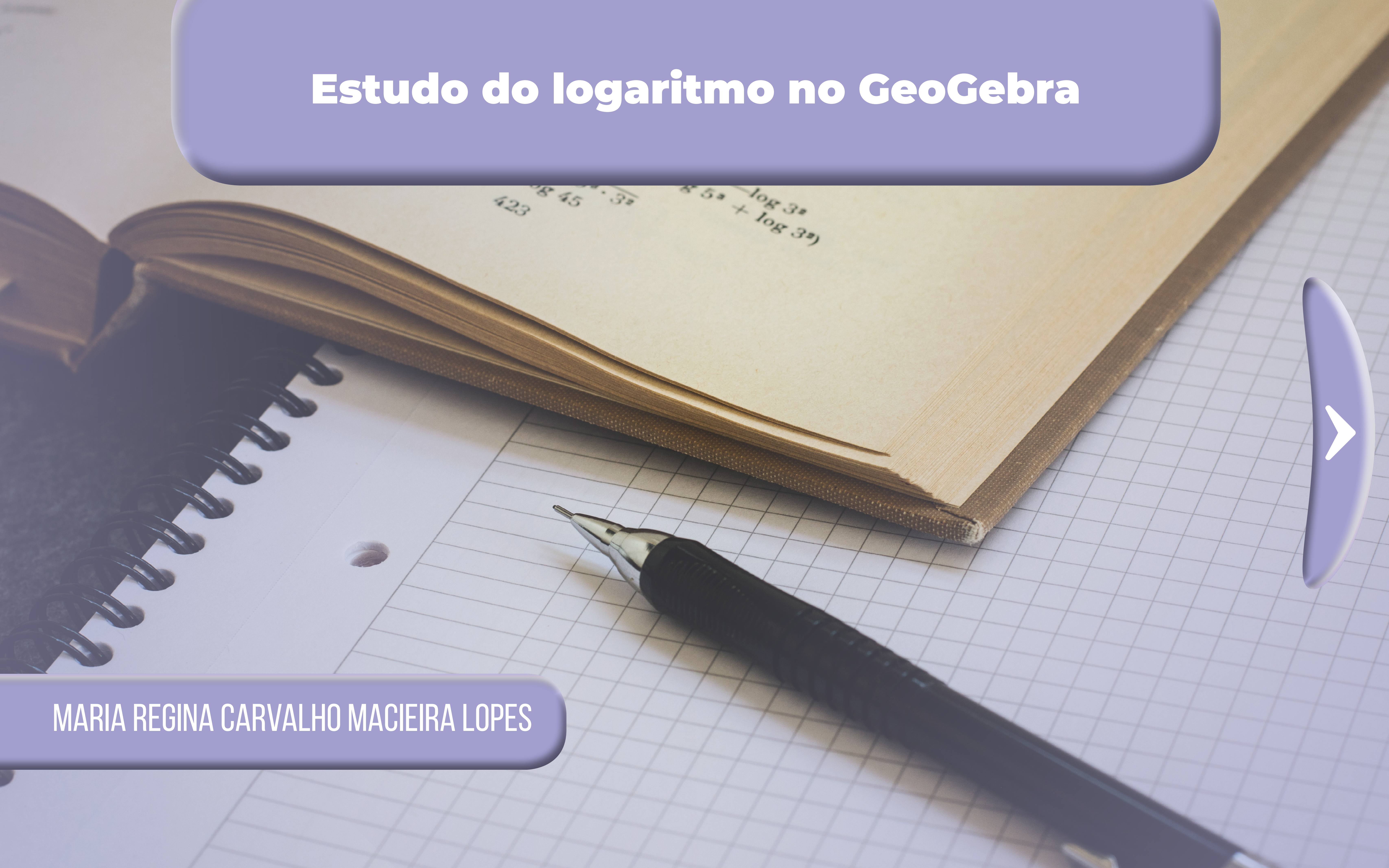
Estudo do logaritmo no GeoGebra



MARIA REGINA CARVALHO MACIEIRA LOPES

Caros alunos,

Esse ebook é um pdf interativo. Para conseguir acessar todos os seus recursos, é recomendada a utilização do programa Adobe Reader 11.

Caso não tenha o programa instalado em seu computador, segue o link para download:

http://get.adobe.com/br/reader/

Para conseguir acessar os outros materiais como vídeos e sites, é necessário também a conexão com a internet.

O menu interativo leva-os aos diversos capítulos desse ebook, enquanto as setas laterais podem lhe redirecionar ao índice ou às páginas anteriores e posteriores.

Nesse *pdf*, o professor da disciplina, através de textos próprios ou de outros autores, tece comentários, disponibiliza links, vídeos e outros materiais que complementarão o seu estudo.

Para acessar esse material e utilizar o arquivo de maneira completa, explore seus elementos, clicando em botões como flechas, linhas, caixas de texto, círculos, palavras em destaque e descubra, através dessa interação, que o conhecimento está disponível nas mais diversas ferramentas.

Boa leitura!

SUMÁRIO

Apresentação

As mídias informáticas são um recurso cada vez mais utilizado no ensino de matemática, tanto na educação básica como no ensino superior. Em especial, os softwares de geometria dinâmica permitem ao aluno construir, manipular e traçar conjecturas, na resolução de exercícios ou demonstração de alguns teoremas.

As Diretrizes Curriculares para Educação Básica do Paraná (DCE) apresentam as Mídias Tecnológicas como uma tendência metodológica em Educação Matemática que "[...] dinamizam os conteúdos curriculares e potencializam o processo pedagógico." (DCE, 2008, p. 65).

Partindo dessas premissas, nesse *e-book*, são apresentadas sugestões de atividades para sala de aula, utilizando o *software* livre GeoGebra que tem uma interface amigável e a possibilidade de abertura de várias janelas (algébrica, CAS, gráfica, planilha), simultaneamente. Esse último atributo do *software* possibilita que o aluno experimente e acompanhe as alterações nos objetos gráficos e algébricos, em estudo.

As atividades propostas são focadas no estudo do logaritmo e da função logarítmica, muitas vezes incógnitos no ensino médio. Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) o logaritmo faz parte dos conteúdos estruturantes Números e Álgebra e Funções (PARANÁ, 2008).

Aproveitem esse material! Bom estudo a todos!

1. O GeoGebra

Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um *software* livre de geometria dinâmica e álgebra, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática. O *software* tem recursos para desenvolver atividades desde a educação básica até o nível universitário. No GeoGebra são construídos, gráficos, tabelas, textos, cálculos simbólicos, entre outros. Escrito em JAVA e disponível em português é multiplataforma e pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.

Aqui você encontra o manual, atividades, roteiro de instalação etc.

Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro

Aqui estão disponíveis para *download* textos e videoaulas sobre as ferramentas e construções no *software*.

O GeoGebra | Site voltado ao *software* GeoGebra

1.1 As Janelas do GeoGebra

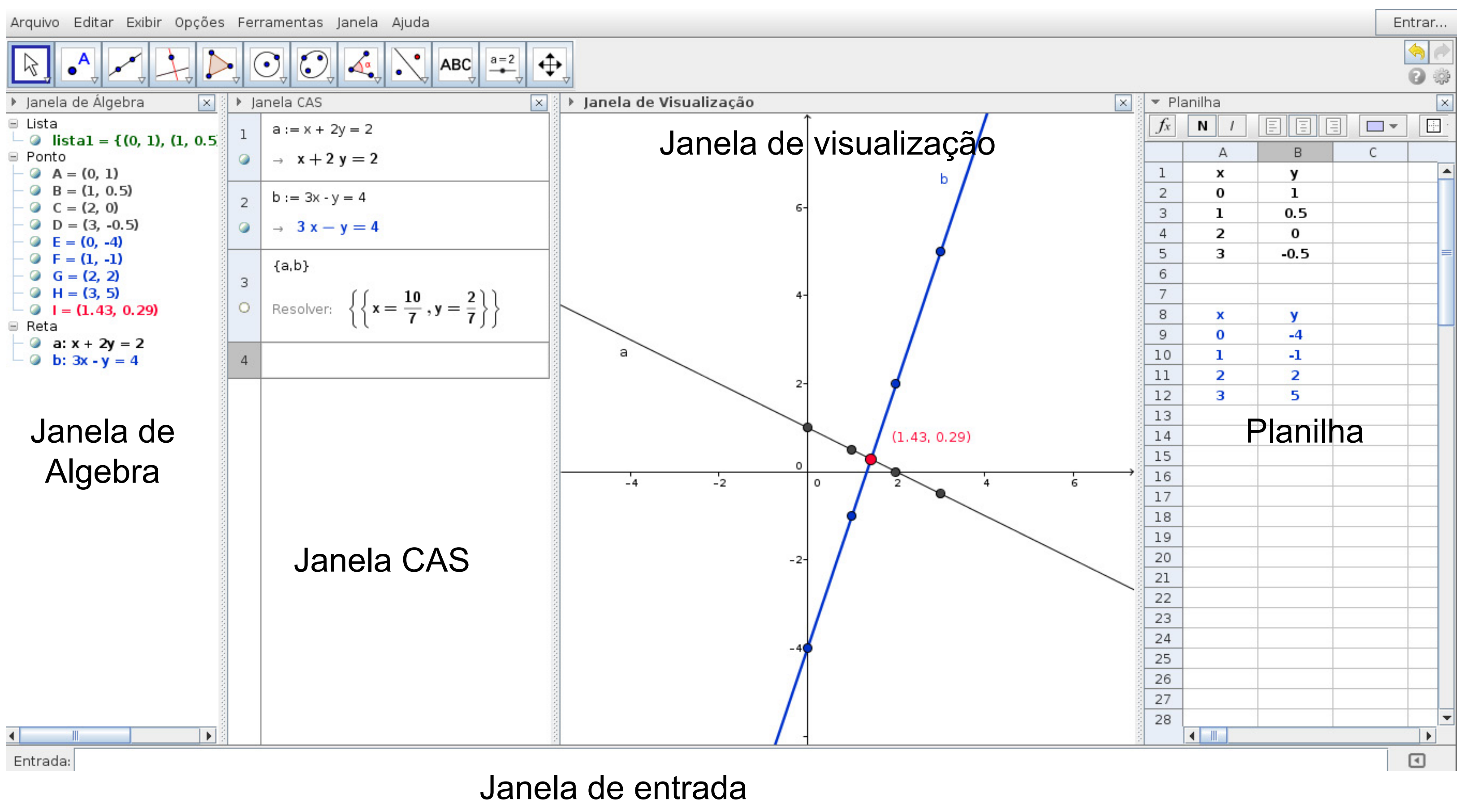
Janela de álgebra: para exibição e manipulação de dados algébricos (funções, coordenadas, equações, medidas etc.) dos objetos construídos.

Janela de entrada: para inserção dos comandos algébricos do *software*.

Janela de visualização: para representações gráficas de funções, pontos, vetores, polígonos etc.

Janela CAS: para cálculos algébricos e simbólicos.

Planilha: para organização de dados.



O logaritmo surgiu no começo do século XVII, de maneira independente, nos estudos do matemático escocês John Napier (1550-1617) e do matemático suíço Jost Bürgi (1552 – 1632), como um instrumento auxiliar de cálculo da multiplicação e divisão de grandes números, por ter a propriedade de transformá-las em operações mais simples como a adição e subtração.

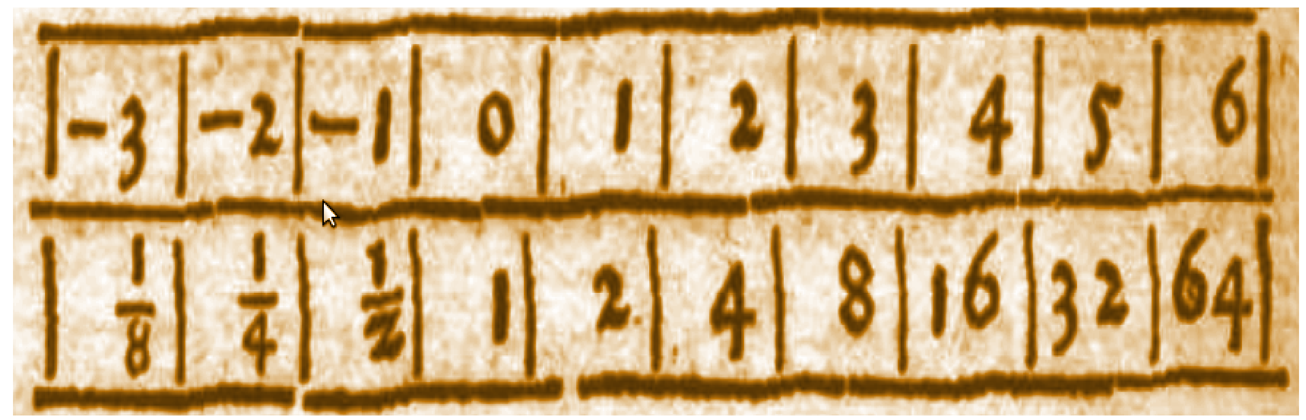
Esses estudos foram baseados nas descobertas do matemático alemão Michael Stifel (1487-1567) que comparou em uma tabela os dados de uma progressão aritmética (PA) e uma progressão geométrica (PG). Seus resultados foram publicados no livro *Aritmética Integra*.

Figura 1 - John Napier, Jost Bürgi e Michael Stifel

Fonte: Wikipedia.

Na tabela de Stifel, a primeira linha corresponde à PA de base 1 e a segunda linha à PG de base 2

Figura 2 - Tabela PA e PG de Stifel



PA	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
PG	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Fonte: Wikipedia.

Na operação: $\frac{1}{8} \times 64$ efetuamos a adição $-3+6=3$ e localizamos o 3 na linha da PA (primeira linha). O resultado da operação é o valor 8, imediatamente abaixo de 3 na linha da PG (segunda linha).

Na operação $16 \div 4$ efetuamos a subtração $4-2=2$ e localizamos o 2 na linha da PA. O resultado da operação é 4, imediatamente abaixo de 2 na linha da PG (segunda linha).

Michael Stifel verificou que o produto na PG, correspondia a uma adição na PA e que uma divisão na PG correspondia a uma subtração na PA.

Na notação atual:

$$log_b(xy) = log_b x + log_b y$$

e

$$log_b(\frac{x}{y}) = log_b x - log_b y$$

Napier, baseado nos estudos dos matemáticos citados, usou uma PG de razão muito pequena, $a = 0{,}999000$ e calculou as potências de a^2 até a^{50} para construir a tabela.

Definiu:

$$Naplog(0{,}999000) = 1$$
$$Naplog(0{,}998001) = Naplog(0{,}999000)^2 = 2$$
$$Naplog(0{,}997003) = Naplog(0{,}999000)^3 = 3$$
$$\vdots$$
$$Naplog(0{,}999000) = Naplog(0{,}999000)^{50} = 50$$

Figura 3 - Tabela Logarítmica de John Napier

0,999000	1	0,989055	11	0,979209	21	0,969461	31	0,959809	41
0,998001	2	0,988066	12	0,978229	22	0,968491	32	0,958850	42
0,997003	3	0,987078	13	0,977251	23	0,967523	33	0,957891	43
0,996006	4	0,986091	14	0,976274	24	0,966555	34	0,956933	44
0,995010	5	0,985105	15	0,975298	25	0,965589	35	0,955976	45
0,994015	6	0,984119	16	0,974322	26	0,964623	36	0,955020	46
0,993021	7	0,983135	17	0,973348	27	0,963658	37	0,954065	47
0,992028	8	0,982152	18	0,972375	28	0,962695	38	0,953111	48
0,991036	9	0,981170	19	0,971402	29	0,961732	39	0,952158	49
0,990045	10	0,980189	20	0,970431	30	0,960770	40	0,951206	50

Fonte: Wikipedia.

No artigo: *John Napier, Henry Briggs e a invenção do logaritmos* do professor João Sampaio, são contados detalhes da construção da tabela e da visita do matemático Henry Briggs à Napier para a construção da tábua de logaritmo de base 10.

John Napier, Henry Briggs e a invenção do logaritmos

2. O logaritmo

2.1 O logaritmo hoje

Há aqui, a definição e algumas propriedades do logaritmo.

Definição: O logaritmo de um número $x > 0$ em relação a uma base, $b > 0$ e $b \neq 1$ é o número y, tal que:

$$y = log_b(x) \Leftrightarrow b^y = x$$

onde:

x é o logaritmando

y é o logaritmo

Da definição, entende-se que o logaritmo é o expoente de certa potência.

Exemplo:

$$log_2 8 = 3 \text{ pois } 2^3 = 8$$

Propriedades:

i) $log_b 1 = 0$

ii) $log_b b = 1$

iii) $log_b b^x = x$

iv) $b^{log_b(x)} = x$

v) $log_b(xy) = log_b x + log_b y$

vi) $log_b(\frac{x}{y}) = log_b x - log_b y$

No GeoGebra, usam-se os comandos para as bases:

Tabela 1 - Comando para bases no GeoGebra

Base	Comando
2	log2(<x>)
10	log10(<x>)
e	log(<x>) ou ln(<x>)
Base qualquer	log(<b> , <x>)

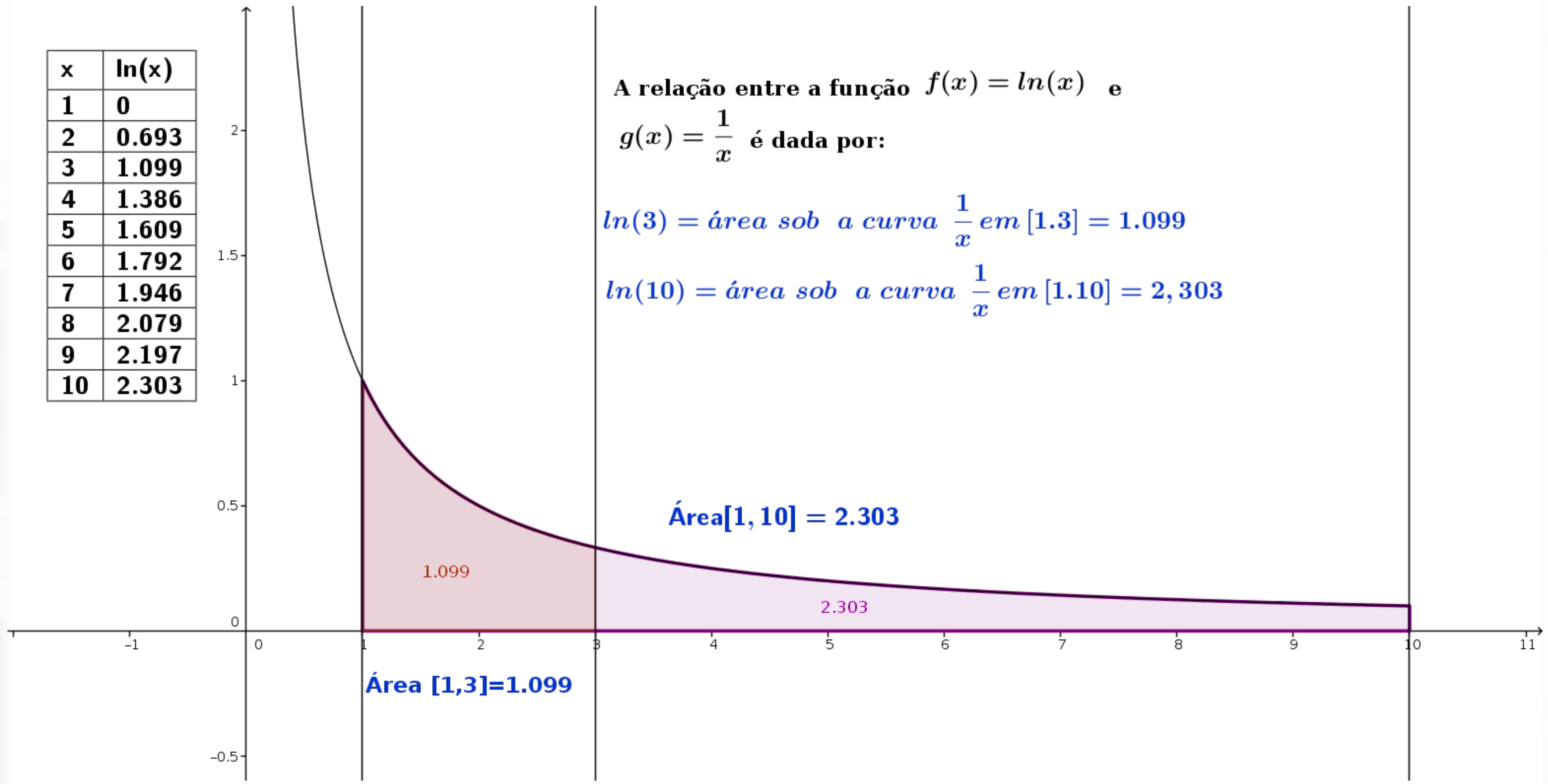
Fonte: A autora.

2.2 A função logarítmica

Uma função real $f: \Re^{*}{}_{+} \rightarrow \Re$, $f(x) = log_b(x)$ é chamada de função logarítmica, onde $b > 0$, $b \neq 1$ e $x > 0$.

Há uma relação entre a função entre a $f(x) = log_b(x)$ e a função $g(x) = \frac{1}{x}$. Sem perda de generalização, na figura 4 é apresentado no GeoGebra uma atividade utilizando o log na base e. Observe que $ln(x)$ é a área sob a curva $\frac{1}{x}$ no intervalo $[1, x]$.

Figura 4 - Relação entre as funções $f(x) = log_b(x)$ e $g(x) = \frac{1}{x}$



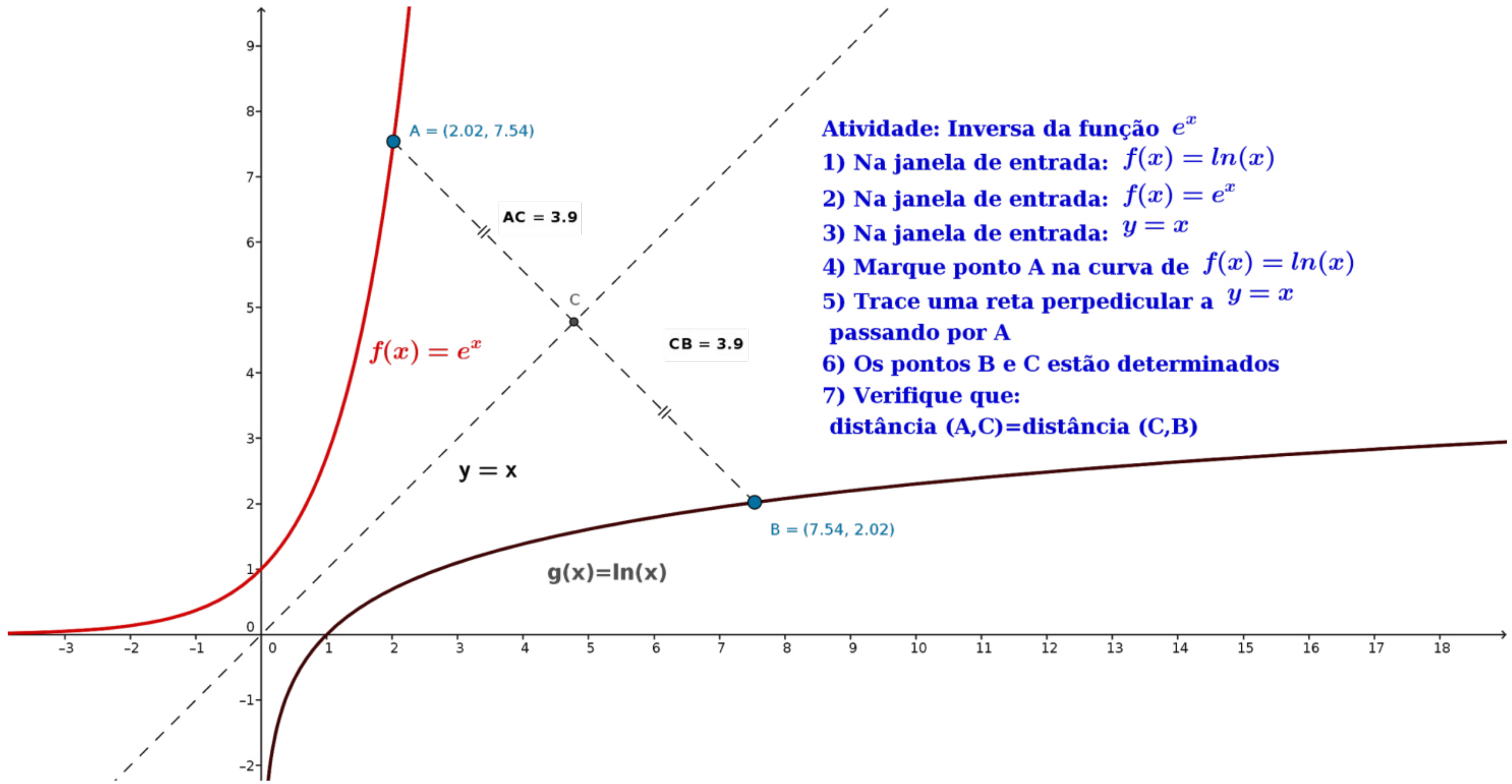
x	ln(x)
1	0
2	0.693
3	1.099
4	1.386
5	1.609
6	1.792
7	1.946
8	2.079
9	2.197
10	2.303

Fonte: A autora.

2.3 A função $f(x) = log_b(x)$ é a inversa da função $f(x) = b^x$

Atividade 1: Construir as funções $f(x) = ln(x)$, $g(x) = e^x$ e $y = x$. Observe a simetria da reta do gráfico dessas funções em relação à identidade. Qual é o domínio e a imagem das funções f e g?

Figura 5 – A inversa da função $g(x) = e^x$



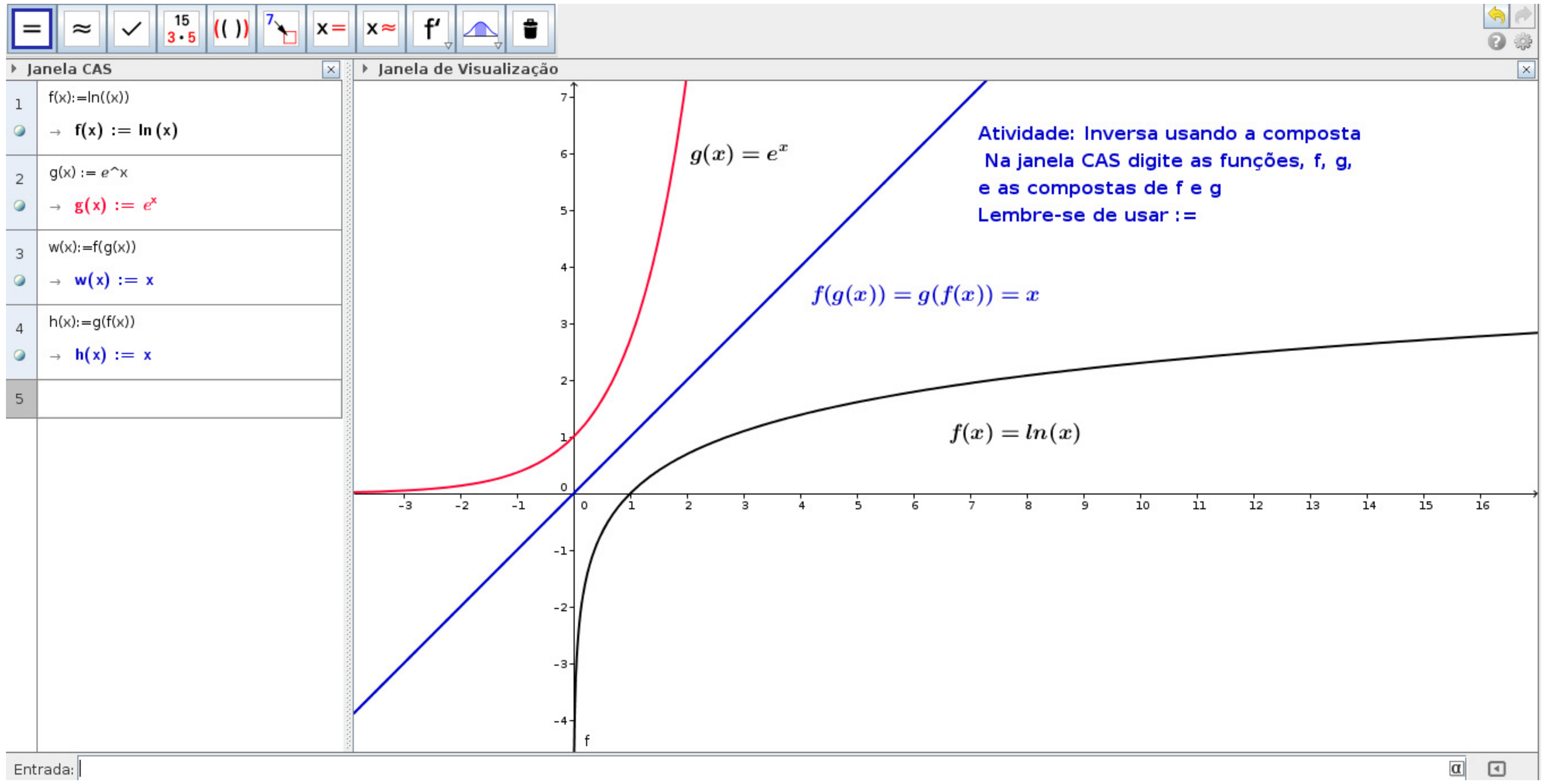
Fonte: A autora.

Atividade 2: Vamos usar a janela de cálculo simbólico (CAS) do GeoGebra. Para tanto, no comando Exibir, selecionar a janela CAS.

Construir, na janela CAS as funções $f(x) = ln(x)$, $g(x) = e^x$ e as funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Observe que o resultado é $f(g(x))=g(f(x)) = x$. Será que esse resultado é válido para outras funções e suas inversas? Faça alguns testes!

Figura 6 - Cálculo algébrico da inversa da função e^x



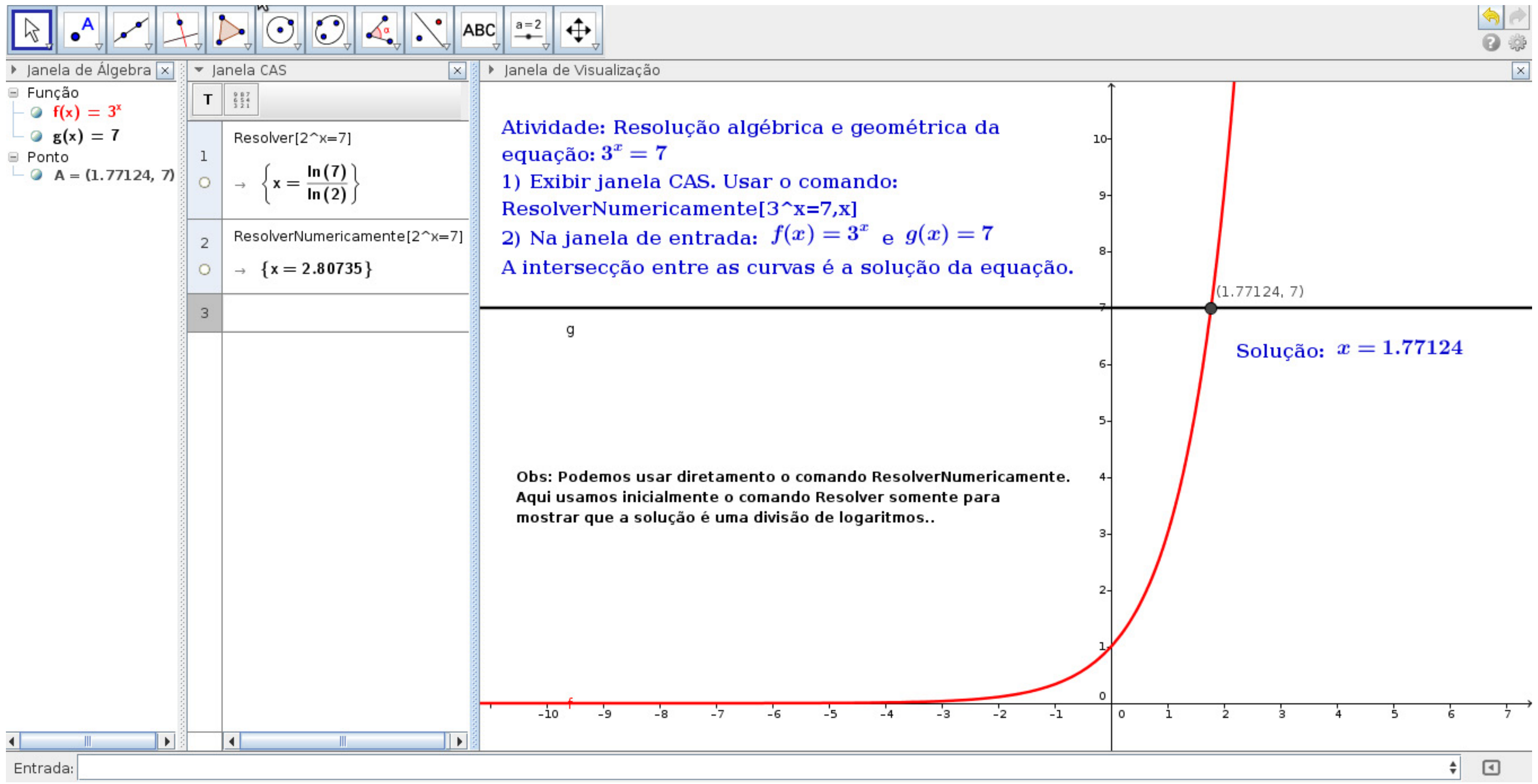
Fonte: A autora.

2.4 Solução algébrica e gráfica de uma equação exponencial usando a inversa logaritmo

Atividade: Resolva a equação $2^x=7$ algebricamente e geometricamente.

Vamos trabalhar com as 3 janelas abertas: a Algébrica, a CAS e a de Visualização.

Figura 7 - Solução da equação exponencial $2^x = 7$

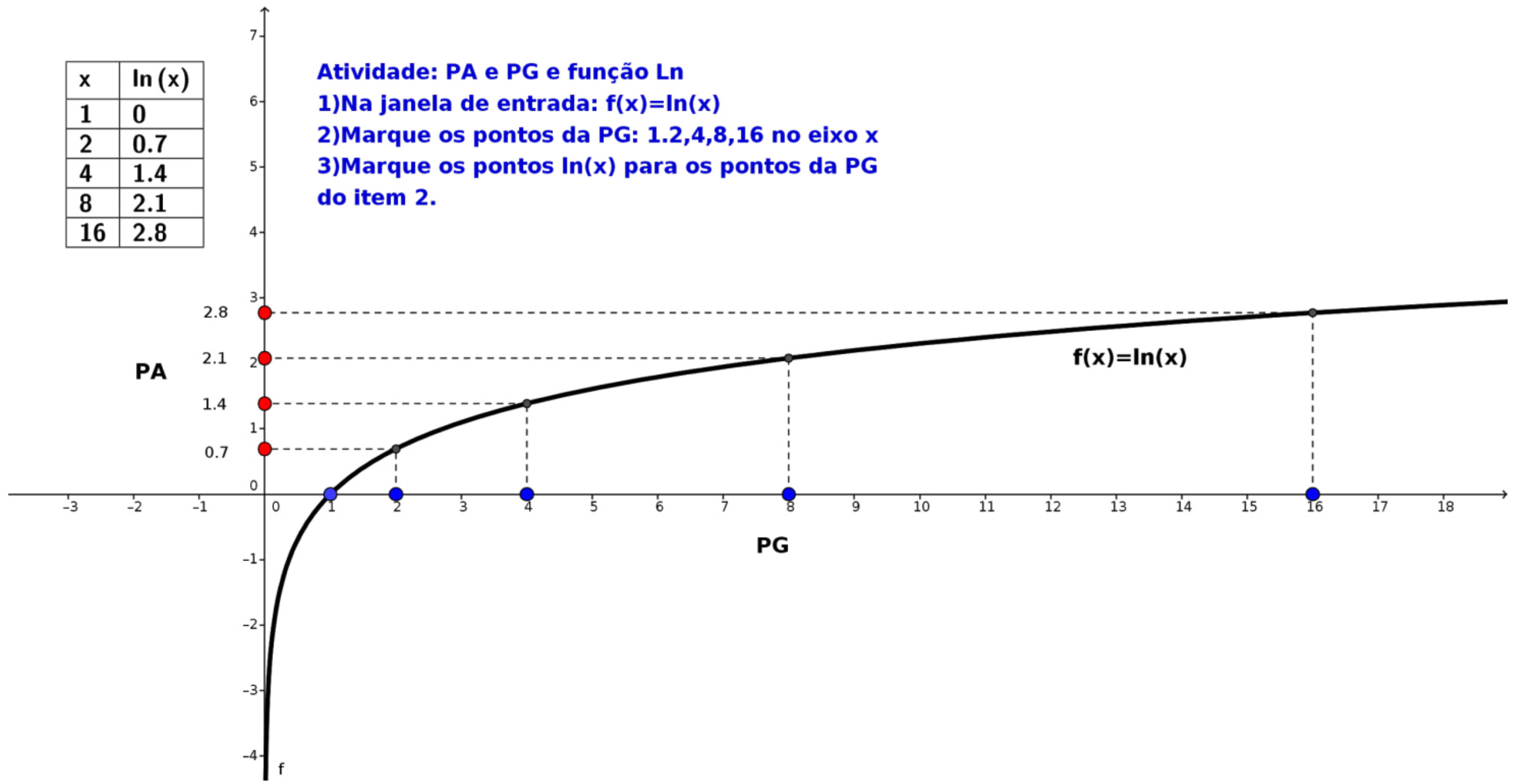


Fonte: A autora.

2.5 Atividade: PA, PG e a função $f(x) = ln(x)$

Atividade: Construa gráfico de $f(x) = ln(x)$ e identifique no eixo x uma PG com primeiro termo igual a 1 e razão igual a 2. Construa uma tabela na planilha do GeoGebra e coloque na primeira coluna os 5 primeiros termos x dessa PG e na segunda coluna os valores de $f(x) = ln(x)$. O que você observa com relação aos valores das duas colunas?

Figura 8 - PA, PG e a função logarítmica



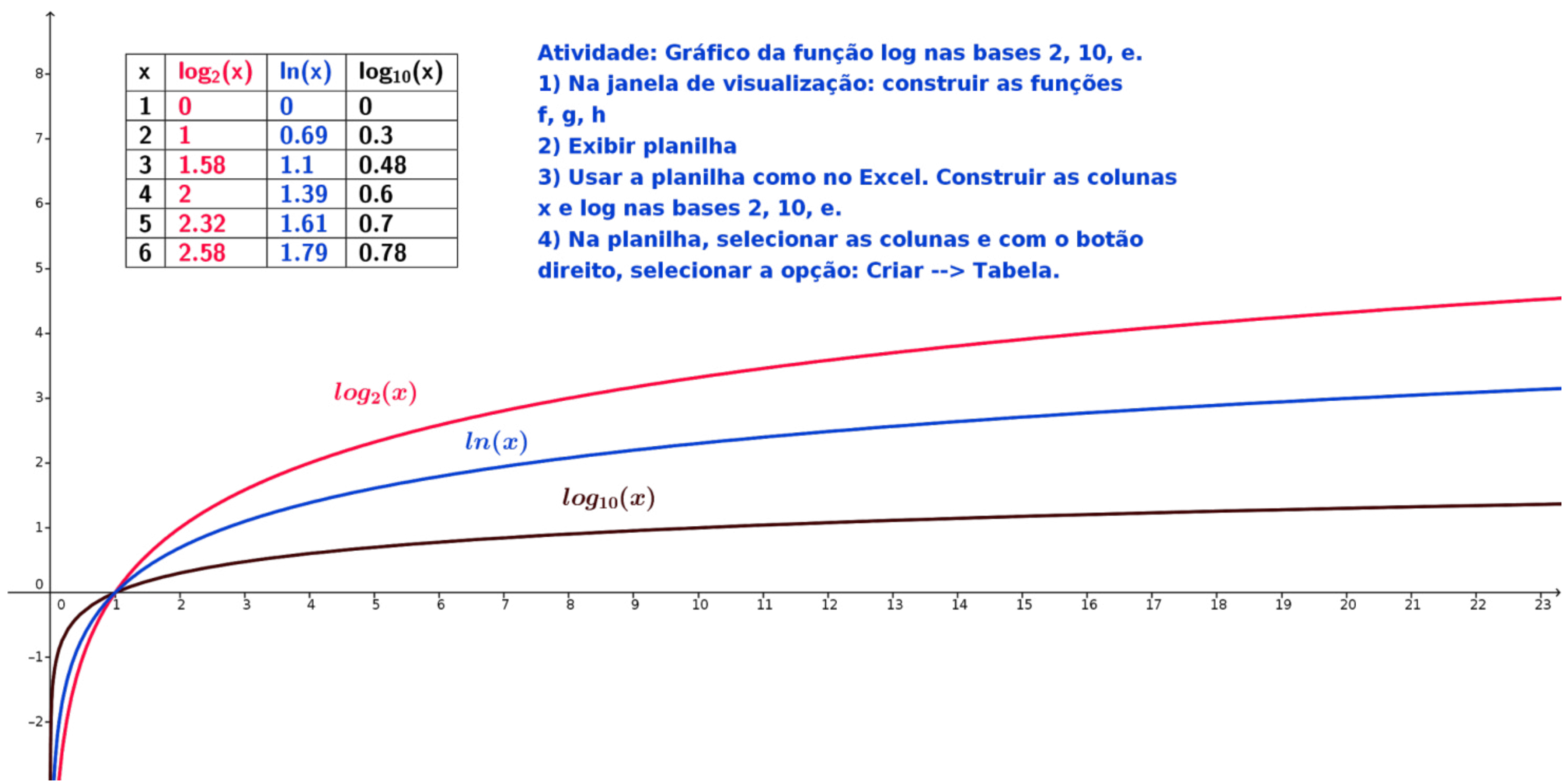
Fonte: A autora.

Observe que, por meio da função ln(x), a $PG\colon(1,2,4,8,16)$ de razão 2 é transformada em uma $PG\colon(0.7,1.4,2.1)$ de razão $ln(2) = 0.7$. Neste caso, a função ln(x) transforma produto em soma.

2.6 As bases da função: a influência da base na função logarítmica

Atividade 1: Construa no GeoGebra os gráficos da função logarítmica com as base: 2, 10 e $e = 2{,}7182818$. Em qual base a função cresce mais rapidamente?

Figura 9 - Bases 2, 3 e *e* da função logarítmica



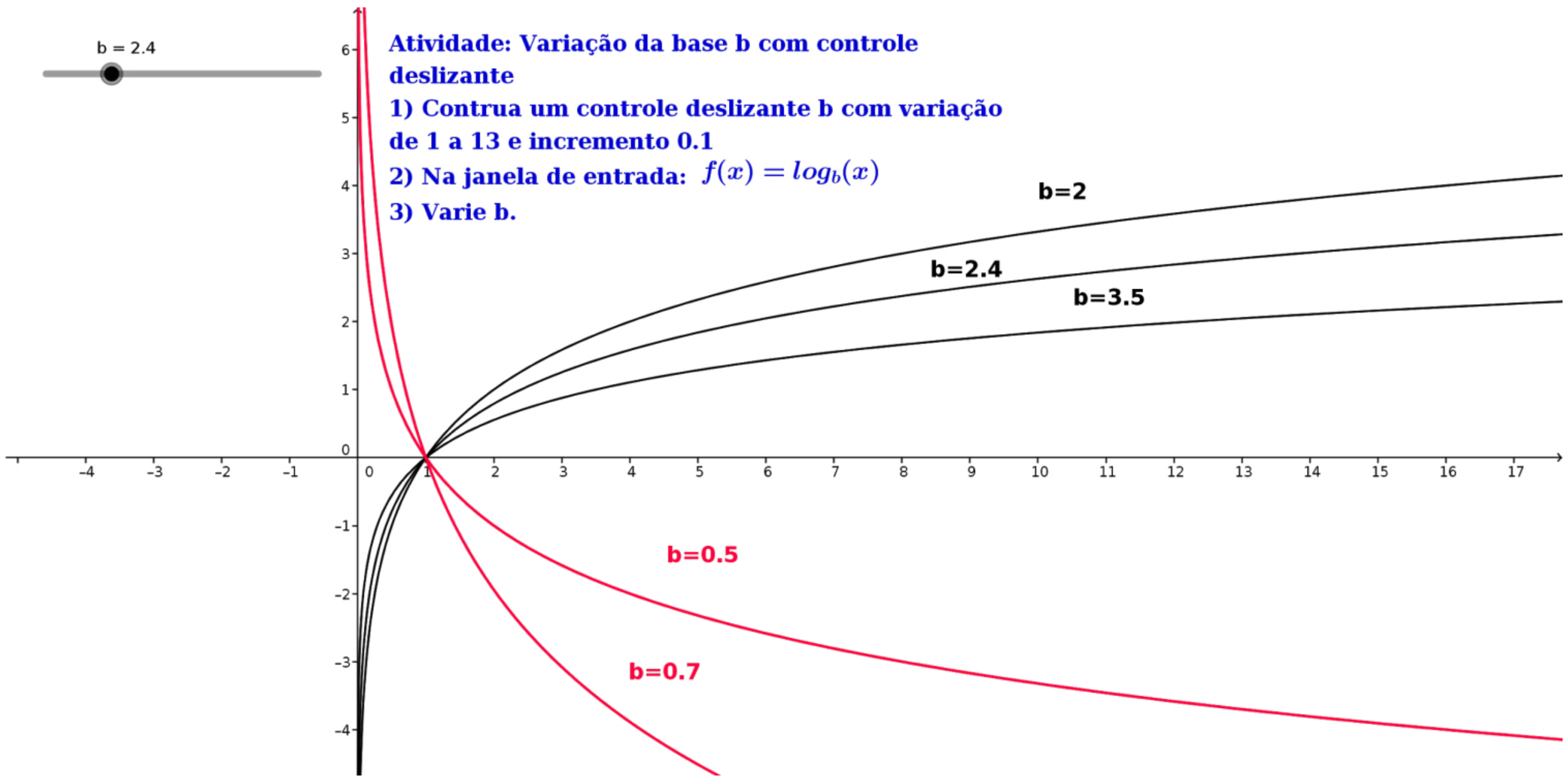
Fonte: A autora.

Atividade 2: Vamos testar outras bases (b) com a utilização da ferramenta controle deslizante.

a) Qual a relação entre a base b e o fato da função log ser crescente ou decrescente?

b) Que resposta o GeoGebra dá quando b = 0 e b = 1?

Figura 10 - Variação da base b com controle deslizante



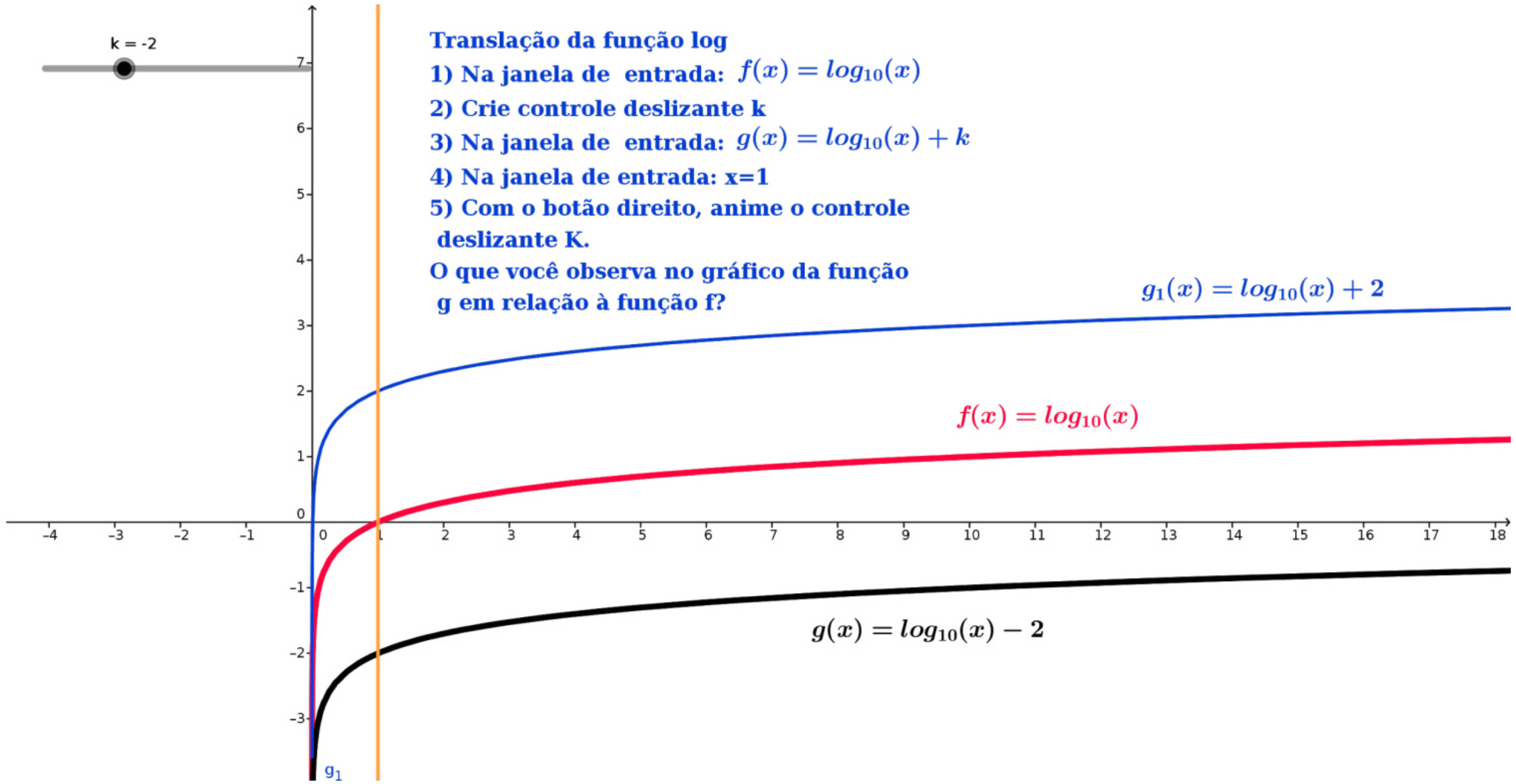
Fonte: A autora.

2.7 A translação no gráfico da função logarítmica

Atividade 1: Translação vertical

Construa o gráfico da função $f(x) = ln(x)$ e a translação $g(x) = ln(x) + k$ onde k é um número real.

Figura 11 - Translação vertical da função logarítmica

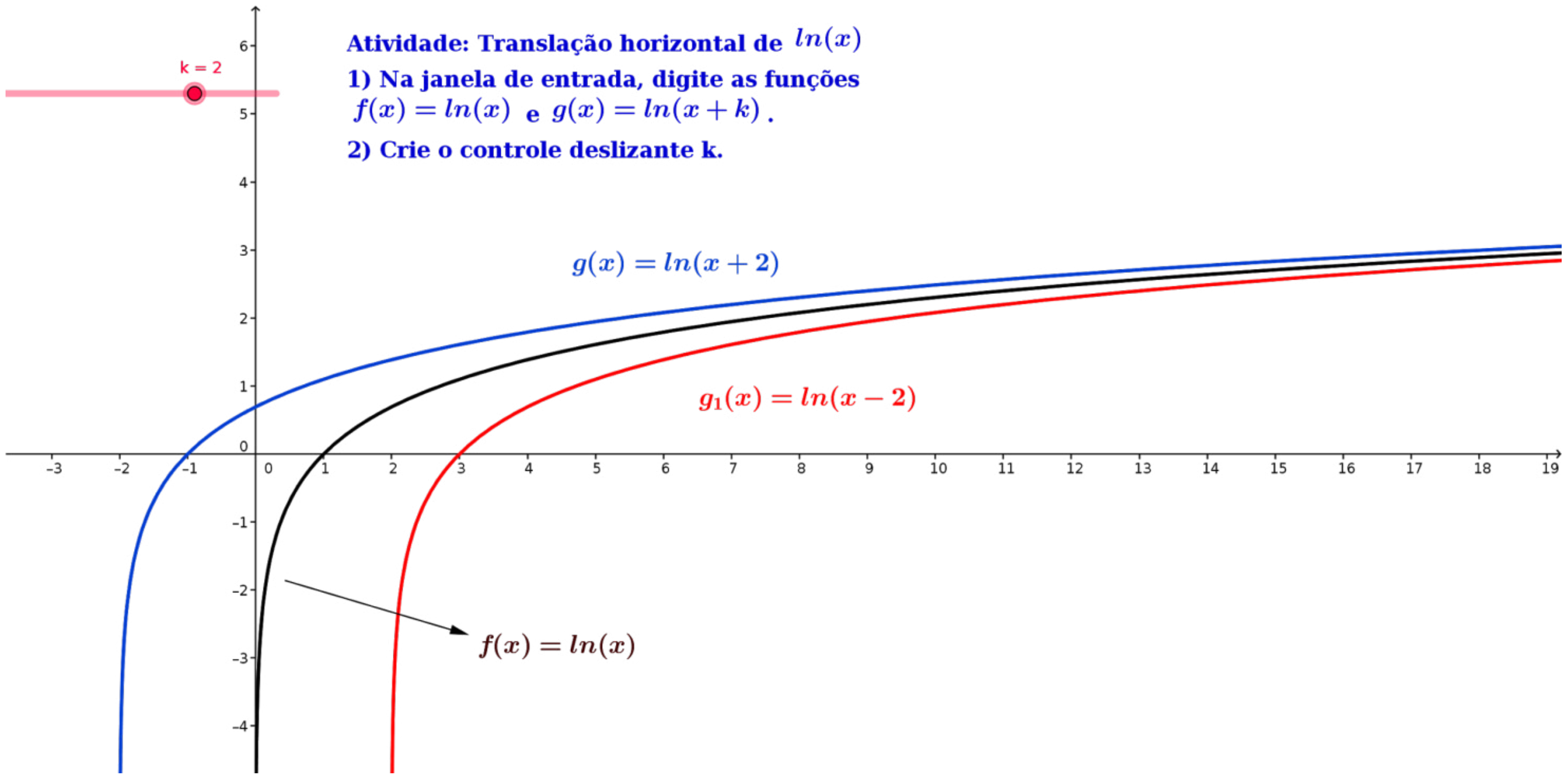


Fonte: A autora.

Atividade 2: translação horizontal

Construa o gráfico da função $f(x) = ln(x)$ e a translação $g(x) = ln(x + k)$ em que k é um número real. Compare o gráfico das funções f e g. O que se observa com relação à raiz de f e g?

Figura 12 - translação horizontal da função logarítmica



Fonte: A autora.

3. Aplicação do logaritmo

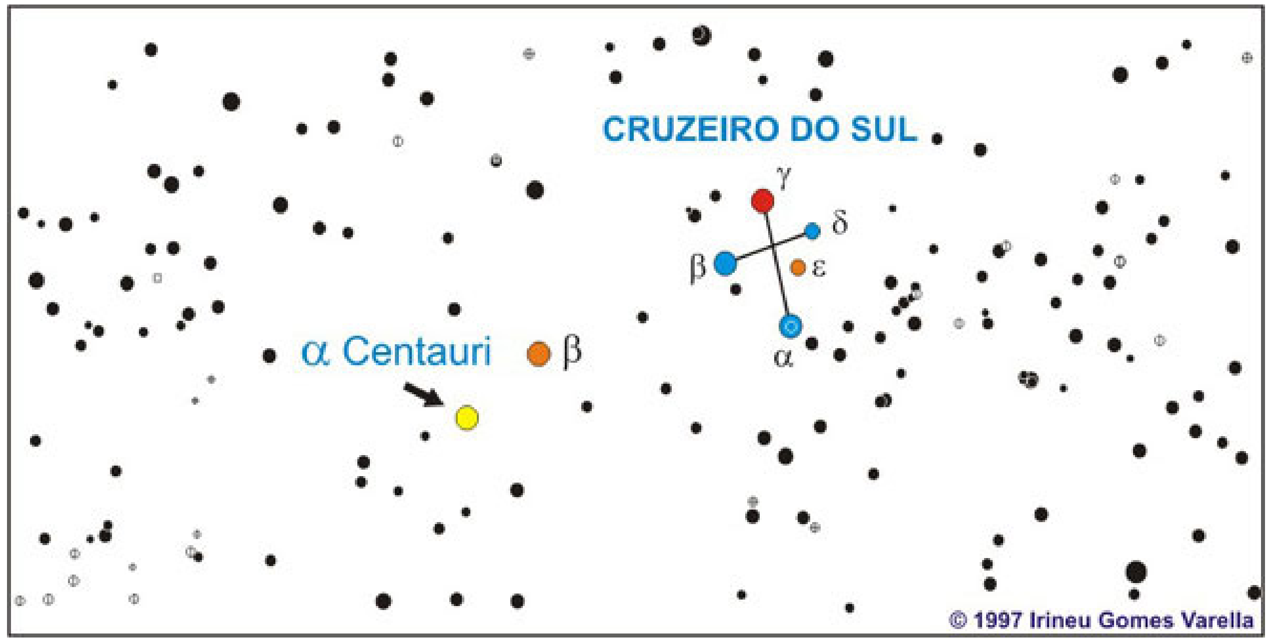
Hoje há mais necessidade das tábuas de logaritmos para efetuar cálculos. Então, como utilizamos o logaritmo?

3.1 Conversão de escala

A aplicação de logaritmo é usada para colocar dados em uma escala amigável. Veja os exemplos:

A apha centauri é o sistema triplo de estrelas mais próximo do sistema solar. Está localizado a leste do cruzeiro do sul e pode ser visto em todo o hemisfério sul (figura 13). Cientistas como Stephen Hawking, Peter Wernher junto com Mark Zuckerberg uniram-se num projeto que prevê uma missão interestelar à alpha centauri. Acredita-se que esse sistema possa abrigar um planeta semelhante à terra e, portanto, com condições de vida.

Figura 13 - Localização de alpha centauri



A distância da terra à alpha centauri é 41 000 000 000 000 km. Você já pensou como seria trabalhar com dados dessa magnitude? Trabalhase em escala logarítmica e essa distânciatorna-se:

Tabela 2 - Distância da terra à alfa centauri

	Distância aritmética	Distância em Log_{10} (x)
Da terra à alfa centauri	41 x 10^{12} km	13.61

Atividade: representar no GeoGebra os números de 1 a 10 na escala numérica e na escala logarítmica. Construa uma tabela na planilha do *software* com esses dados.

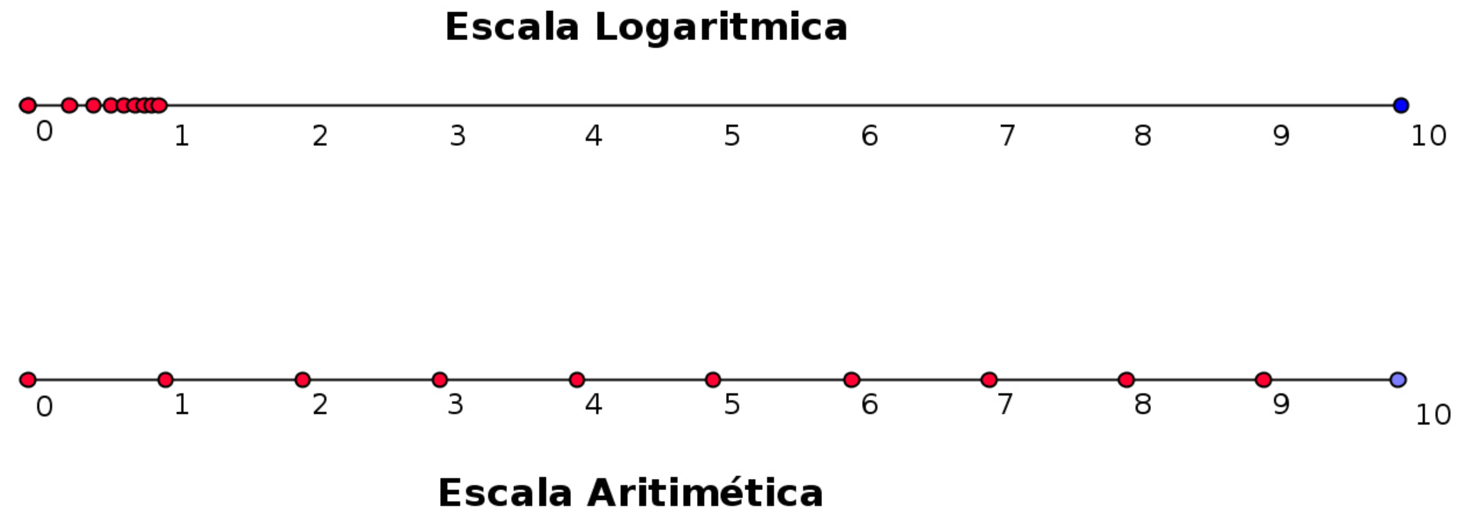
Figura 14 - Escala aritmética e escala logarítmica

Atividade: Números de 1 a 10 nas escalas numérica e logarítimica

1) Na planilha: primeira coluna, números de 1 a 10 e, segunda coluna $log10(x)$ **com** $x \in [1, 10]$

2) Plote os valores nos segmentos.

Aritmética	Logaritmica
1	0
2	0.3
3	0.48
4	0.6
5	0.7
6	0.78
7	0.85
8	0.9
9	0.95
10	1



Observe na escala logarítmica os valores se acumulam no intervalo de 0 a 1.

Fonte: A autora.

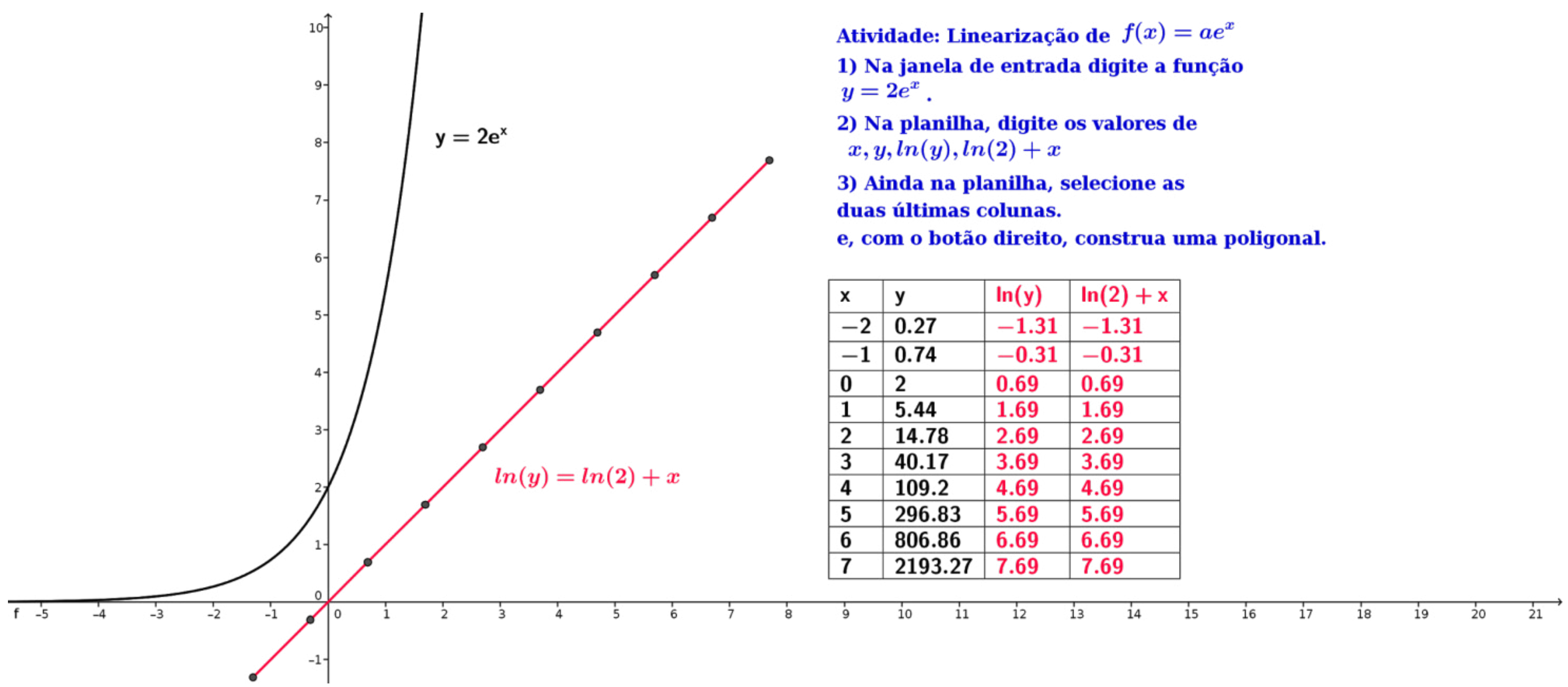
3.2 Linearização da função $y = ae^x$

Se $y = ae^x$ podemos usar a função log para linearizar essa função da seguinte forma:

$$y = ae^x$$
$$ln(y) = ln(ae^x)$$
$$ln(y) = ln(a) + x\,ln(e)$$
$$ln(y) = x + ln(a) \text{ que é uma função linear}$$

Atividade: linearizar a função exponencial, $f(x) = 2e^x$ no GeoGebra.

Figura 15 - Linearização da função $f(x) = 2e^x$



x	y	ln(y)	ln(2) + x
−2	0.27	−1.31	−1.31
−1	0.74	−0.31	−0.31
0	2	0.69	0.69
1	5.44	1.69	1.69
2	14.78	2.69	2.69
3	40.17	3.69	3.69
4	109.2	4.69	4.69
5	296.83	5.69	5.69
6	806.86	6.69	6.69
7	2193.27	7.69	7.69

Fonte: A autora.

Na página Matemática Multimídia encontra-se um experimento para modelar uma avalanche de feijões! Nele é apresentada a linearização da função $Q(I) = a\frac{I}{I^b}$, onde a, b são constantes e Q é a quantidade de vezes que a avalanche de feijões, de intensidade I, ocorreu durante o experimento. Confira!

Matemática Multimídia

3.3 Idade de um fóssil

Durante a vida um ser vivo absorve e perde o C^{14}, isótopo radioativo do carbono. Quando morre, naturalmente, a absorção cessa e o C^{14} começa a desintegrar-se. Sabendo a meia vida (tempo para que seja reduzido à metade) do C^{14} é possível calcular a taxa de desintegração α e estimar a idade de um fóssil. Essa taxa é dada por: $\alpha = \frac{ln(2)}{5570}$, onde 5570 é aproximadamente a meia vida do C^{14}.

Figura 16 - Fóssil de um dinossauro

Fonte: Wikipedia.

3.4 Nível Sonoro

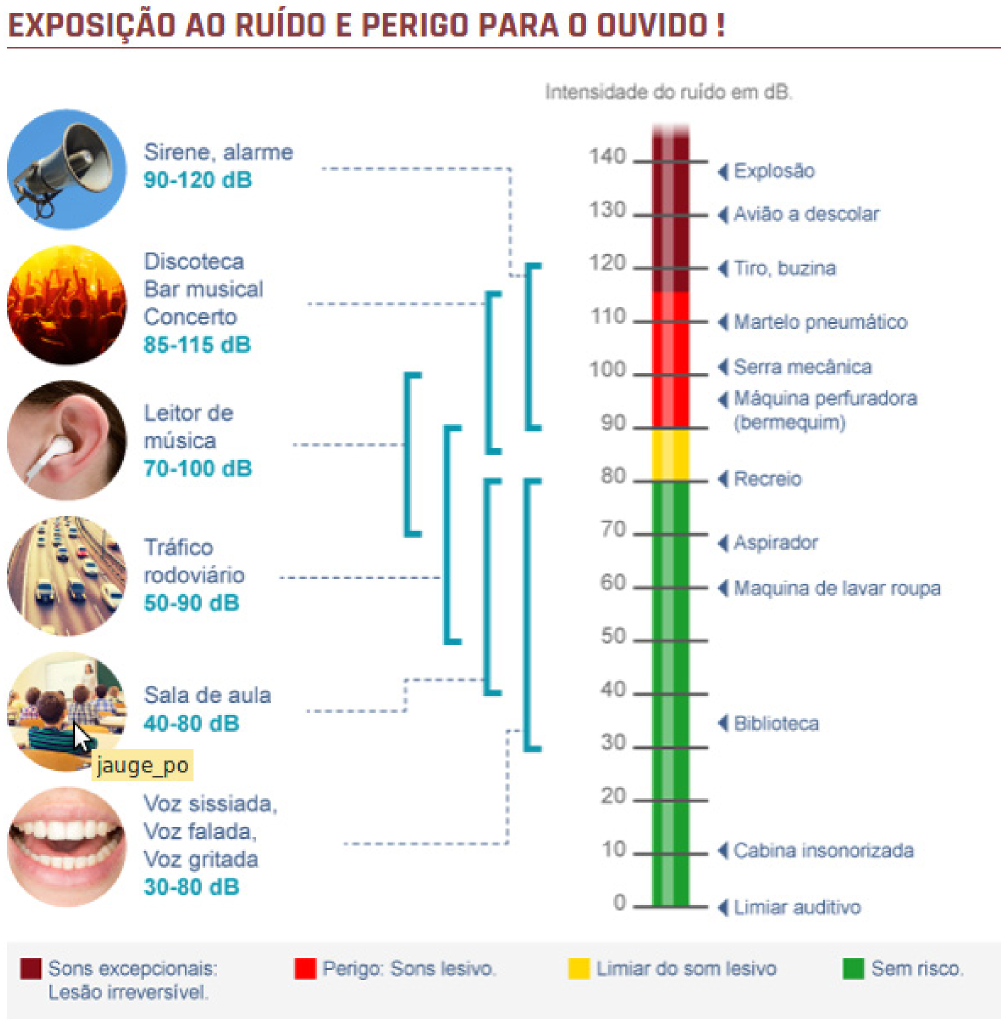
Algumas doenças como estresse e surdez são ocasionadas por longo tempo de exposição a níveis sonoros muito altos (> 80 dB). O nível sonoro (NS) pode ser calculado por:

$$NS = 10\ log(\frac{I}{I_0})$$

onde: I é a intensidade do som e I_0 é o limiar de audibilidade.

Observe na figura 17 as medidas do NS de algumas situações cotidianas.

Figura 17 - Níveis de ruído



Fonte: www.cochlea.org.

3.5 A Pressão Arterial

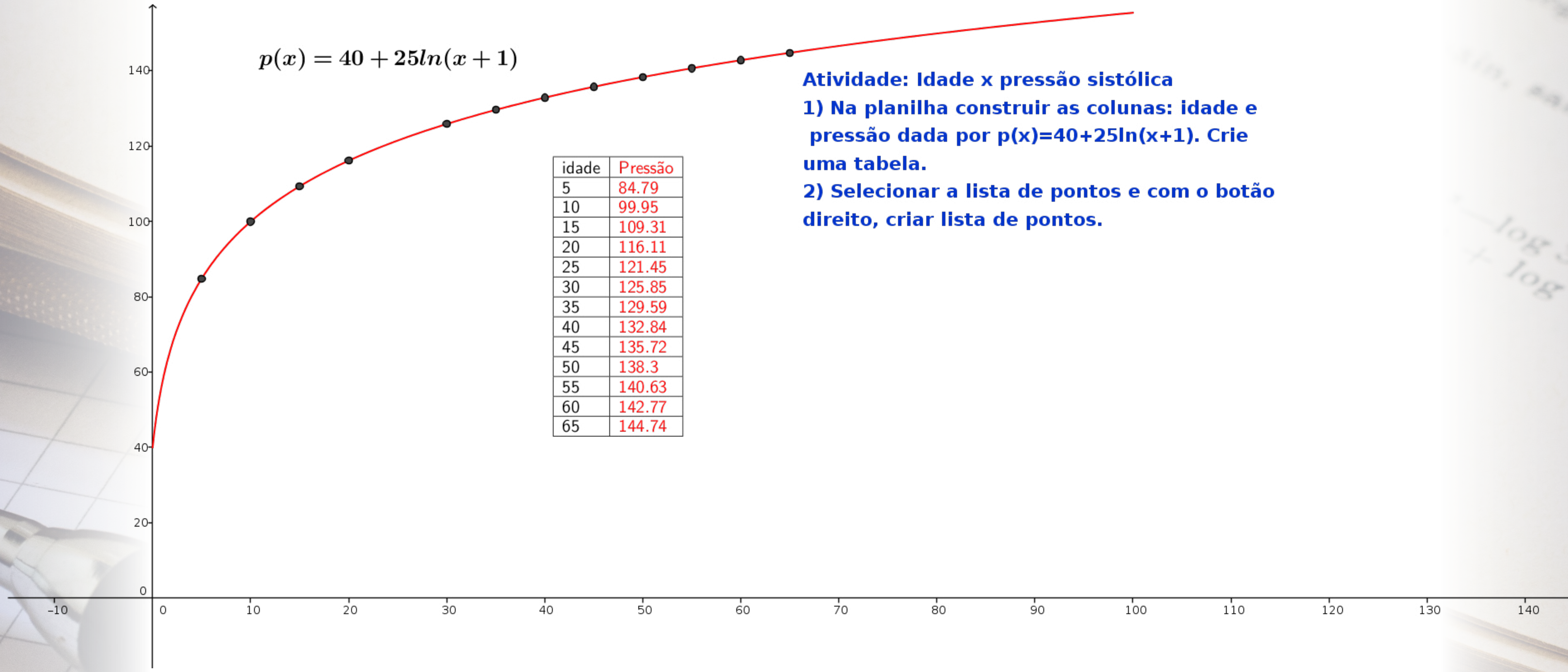
A pressão arterial de uma pessoa é avaliada no esfigmomanômetro por dois tipos de pressão: a sistólica e a diastólica. A pressão arterial sistólica é o maior valor aferido e correspondente ao valor medido no momento em que o ventrículo esquerdo bombeia uma quantidade de sangue para a aorta. A pressão diastólica é o menor valor aferido e correspondente ao momento em que o ventrículo esquerdo volta a encher-se para retomar todo o processo da circulação. Ambas são medidas em milímetros de mercúrio. A fórmula empírica da pressão sistólica (p) é dada por:

$$p(x) = 40 + 25\, ln(x+1),\, x\epsilon[0{,}65]$$

onde x é a idade da pessoa medida em anos.

Atividade: construa uma tabela no GeoGebra da Idade x Pressão, com a idade variando em intervalos de 5 anos, de 5 a 65 anos. Plote o gráfico dessa função.

Figura 18 - Idade x Pressão Sistólica



idade	Pressão
5	84.79
10	99.95
15	109.31
20	116.11
25	121.45
30	125.85
35	129.59
40	132.84
45	135.72
50	138.3
55	140.63
60	142.77
65	144.74

Fonte: A autora.

Outras aplicações como *A boca e os germes*, *A mesada que triplica*

Considerações finais

O estudo do logaritmo é muito interessante e é utilizado como aplicação para vários conteúdos do Ensino Médio. Esse assunto resulta em um excelente projeto de pesquisa!

Obrigada pela consulta ao material.

Prof. Maria Regina C. M. Lopes

Referências

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Curitiba: 2009. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf Acesso em 4 de abril, 2019.

MORAES FILHO, D. C.; OLIVEIRA, M.N.A. Análise da contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos livros didáticos do Ensino Médio. In: III Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2014.Manaus, **Anais** [...]

MUSSEL, R. **Estudo de Funções Logarítmicas no Ensino Médio**. 2014.Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/romulo_mussel.pdf. Acesso em: 2 abril, 2019.

ROCHA, V. G. A Importância dos Logaritmos ontem e hoje no desenvolvimento da matemática e das ciências- Uma abordagem didática. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Viçosa, M.G.

SAMPAIO, J. **John Napier, Henry Brigss e a invenção do logaritmo**. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF. Acesso em: 15 março 2019.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE
UNICENTRO

NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA - NEAD
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL - UAB

Prof.ª Msª. Luciene Regina Leineker
Coordenador Geral Curso

Profª. Drª. Maria Aparecida Crissi Knuppel
Coordenadora Geral NEAD / Coordenadora Administrativa do Curso

Prof. Dr. Márcio André Martins
Coordenador de Estágio

Prof. Msª. Marta Clediane Rodrigues Anciutti
Coordenadora de Programas e Projetos / Coordenadora Pedagógica

Espencer Gandra
Murilo Holubovski
Designers Gráfico

LUM3N / Pixabay
Elementos gráficos

Jun/2019