RETOMANDO CONCEITOS E REPRESENTAÇÕES: SISTEMAS E FUNÇÕES

MÁRCIO ANDRÉ **MARTINS**

Caros alunos,

Esse ebook é um pdf interativo. Para conseguir acessar todos os seus recursos, é recomendada a utilização do programa Adobe Reader 11.

Caso não tenha o programa instalado em seu computador, segue o link para download:

http://get.adobe.com/br/reader/

Para conseguir acessar os outros materiais como vídeos e sites, é necessário também a conexão com a internet.

O menu interativo leva-os aos diversos capítulos desse ebook, enquanto as setas laterais podem lhe redirecionar ao índice ou às páginas anteriores e posteriores.

Nesse *pdf*, o professor da disciplina, através de textos próprios ou de outros autores, tece comentários, disponibiliza links, vídeos e outros materiais que complementarão o seu estudo.

Para acessar esse material e utilizar o arquivo de maneira completa, explore seus elementos, clicando em botões como flechas, linhas, caixas de texto, círculos, palavras em destaque e descubra, através dessa interação, que o conhecimento está disponível nas mais diversas ferramentas.

Boa leitura!

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este material tem como propósito uma abordagem envolvendo ideias básicas sobre dois conteúdos matemáticos comuns em disciplinas de Matemática, desde as mais elementares até as mais avançadas, que são: os Sistemas Lineares e as Funções. O foco está na concepção e na representação das suas características principais, sendo que o aprofundamento teórico e o contato com as aplicações podem ser realizados mediante o acesso aos links indicados.

1. Sobre os Sistemas Lineares

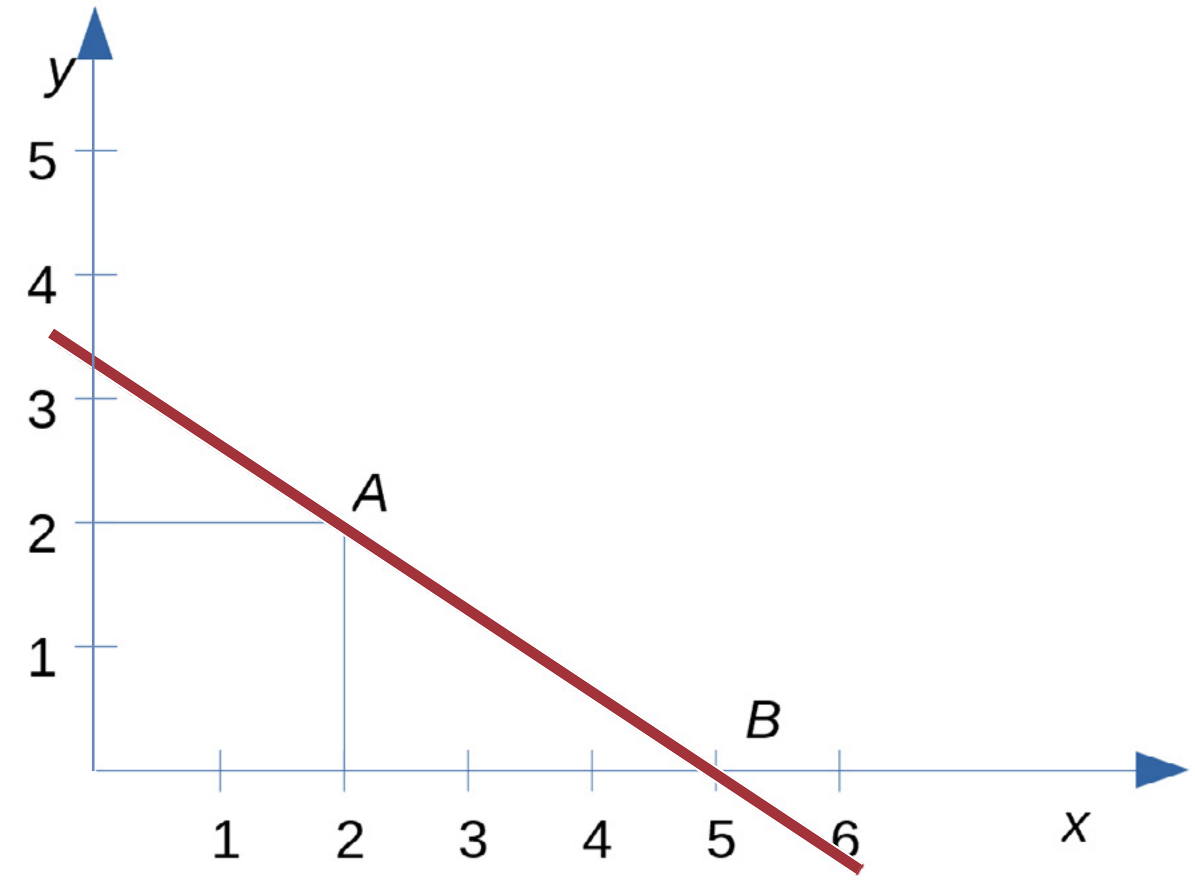
Para falarmos sobre os sistemas lineares, que correspondem a um conteúdo que é abordado nesta disciplina, inicialmente precisamos considerar o conceito de equação. Uma equação pode ser entendida como uma sentença matemática aberta que envolve a igualdade, ou seja, que envolve variáveis e o símbolo =. Em outras palavras, é uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas expressões algébricas. A sua estrutura contempla, portanto, a soma algébrica de parcelas compostas por produtos entre coeficientes, que são números reais conhecidos, e variáveis.

Como exemplo, $2x + 3y = 10$. Esta equação pode representar uma situação em que os preços de dois produtos são desconhecidos, aqui representados, por x e y, respectivamente. Nesta situação hipotética, admite-se que, adquiridas 2 (duas) unidades do primeiro produto e 3 (três) unidades do segundo produto, o preço resultante total resultante foi de 10 (dez) unidades monetárias.

1.1 Da Representação Gráfica

Este modelo matemático, $2x + 3y = 10$, pode ser representado em um sistema de coordenadas cartesianas mediante a ilustração do plano cartesiano caracterizado pelas coordenadas x e y, denominadas abcissa e ordenada, respectivamente. Para isso, de modo bastante sumário, basta atribuir valores para x e obter a correspondência em y. Por exemplo, para $x = 2$ tem-se $y = 2$, pois $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$, isto é, o ponto A de coordenadas (2, 2) satisfaz a equação em estudo. Analogamente, para $x = 5$ tem-se $y = 0$. Assim, os dois pontos, $A = (2, 2)$ e $B = (5, 0)$ ficam caracterizados por meio da equação $2x + 3y = 10$ e, podem ser utilizados para determinar o gráfico da reta correspondente a esta equação, utilizando-se apenas o primeiro quadrante, conforme segue:

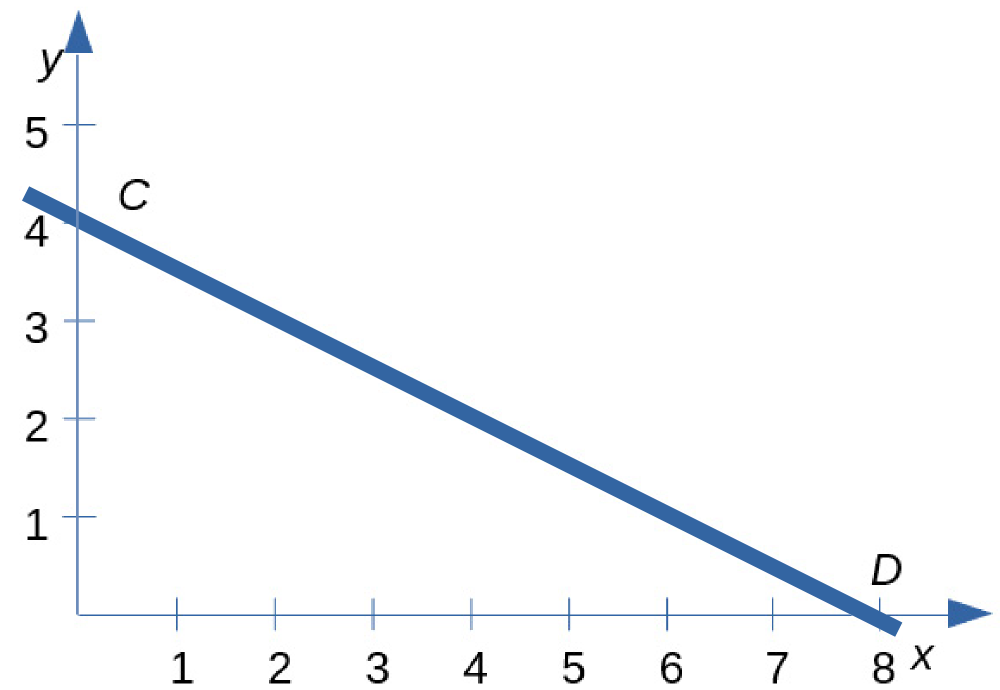
Figura 1 - Representação gráfica da equação 2x + 3y = 10



Fonte: Autor (2021).

Com este mesmo ideário, ao se considerar a representação gráfica da equação x + 2y = 8, pode-se utilizar os pontos C = (0, 4) e D = (8, 0). Assim, tem-se:

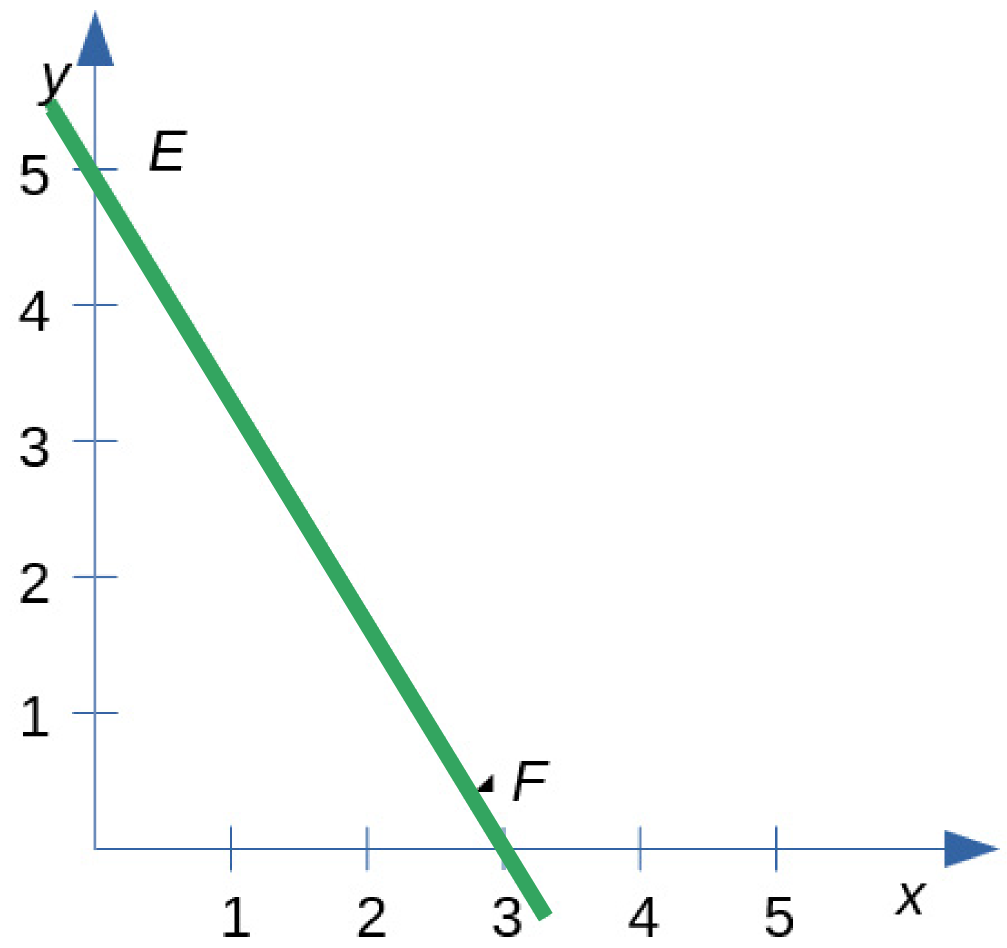
Figura 2 - Representação gráfica da equação x + 2y = 8



Fonte: Autor (2021).

E, de modo semelhante, a equação 5x + 3y =15 pode ser representada considerando-se como base os pontos E = (0, 5) e F = (3, 0).

Figura 3 - Representação gráfica da equação 5x + 3y = 15

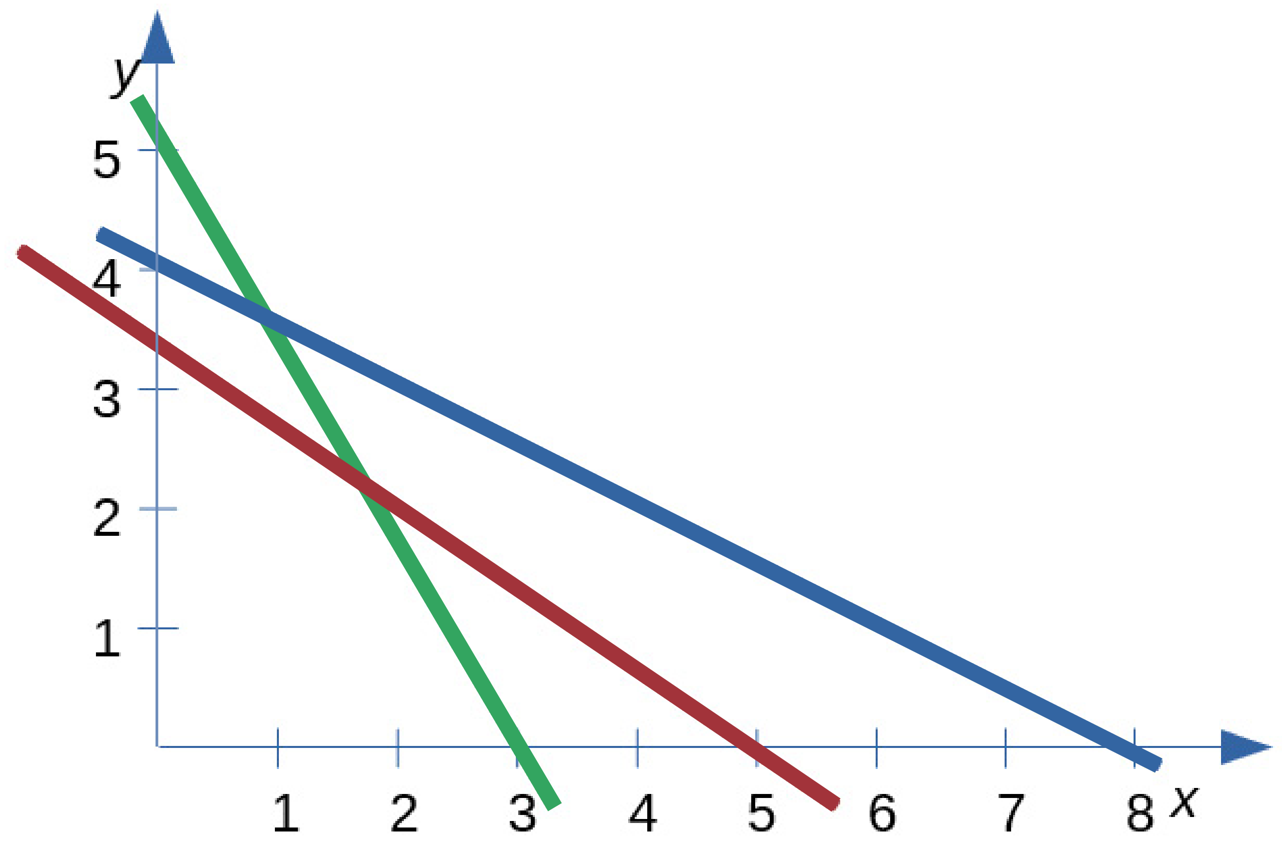


Fonte: autor (2021).

1.2 Da Solução do Sistema Linear

As retas representadas nas Figuras 1, 2 e 3 podem ser entendidas como conjuntos de pontos. Portanto, em acordo com a Teoria dos Conjuntos, vista anteriormente, é coerente se investigar a possibilidade de intersecção entre tais conjuntos. Esta análise pode ser conduzida de modo empírico, em uma abordagem de sobreposição de gráficos. Com este intuito, considera-se então a representação concomitante entre as retas representadas nas figuras anteriores, resultando na Figura 4.

Figura 4 - Gráficos representados nas Figuras 1, 2 e 3



Fonte: Autor (2021).

Ao se delimitar o estudo apenas ao primeiro quadrante do plano cartesiano, é possível observar na Figura 4 que as retas representadas em verde e em azul possuem um ponto de intersecção, assim como as representadas em verde e em vermelho. Porém, isso não ocorre ao se considerar as retas ilustradas em azul e vermelho, ou seja, não há ponto de intersecção entre elas no primeiro quadrante, isto é, para valores de x e y não negativos. Do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos, o último caso, intersecção entre as retas em azul e em vermelho, no primeiro quadrante, corresponde ao conjunto vazio, { }.

Observa-se que as retas representadas na Figura 4 correspondem às seguintes equações: 1) $2x + 3y = 10$ (reta vermelha); 2) $x + 2y = 8$ (reta azul) e 3) $5x + 3y = 15$ (reta verde); portanto, é possível se dizer que 1) e 3) possuem intersecção, assim como 2) e 3), no primeiro quadrante, ou, admitindo-se apenas possibilidades de valores não negativos para as variáveis x e y. Novamente com referência à teoria dos Conjuntos, a intersecção se refere ao operador lógico-matemático 'e', ou seja, a conjunção. Vale destacar que uma conjunção é válida apenas quando ambas as proposições que a compõe são verdadeiras, isto é, são satisfeitas. Neste caso, atender às características específicas de uma equação e da outra, satisfazer ambas as equações.

Ao se buscar a solução que satisfaz mais de uma equação utiliza-se a terminologia 'Sistemas de Equações'. Quando as equações possuem características lineares, ou seja, são formadas apenas por operadores aritméticos, não havendo produto entre variáveis ou expoente diferente da unidade, passa a ser chamado 'Sistema de Equações Lineares', ou, apenas, 'Sistema Linear'.

Assim, o Sistema Linear formado pelas equações 1) $2x + 3y = 10$ (reta vermelha) e 3) $5x + 3y = 15$ (reta verde) possui solução no primeiro quadrante, para valores não negativos de x e y, bem como o Sistema Linear formado pelas equações 2) $x + 2y = 8$ (reta azul) e 3) $5x + 3y = 15$ (reta verde). Em outras palavras, é possível se encontrar valores não negativos para as variáveis x e y que satisfazem estes dois sistemas.

Se você quer saber mais sobre a solução de um sistema linear veja:

Sistemas Lineares

1.3 Da Simbologia associada a um Sistema Linear

A notação utilizada para representar um sistema é a chave, {, que corresponde à conjunção entre as equações que devem ser resolvidas simultaneamente. A conjunção corresponde ao operador lógico 'e', assim a ideia básica é buscar a solução comum para a primeira equação e para a segunda equação, nos casos em estudo.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 5x + 3y = 15 \end{cases}$$

Mais detalhes sobre a simbologia associada a um sistema linear podem ser vistos no sítio:

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares
Espaços Vetoriais

1.4 Da Classificação da Solução de um Sistema Linear

Esta análise envolvendo as variáveis x e y permite algumas conclusões. A solução para o primeiro sistema corresponde a $x = 5/3$ e $y = 20/9$. Já o segundo sistema tem solução $x = 6/7$ e $y = 25/7$. Nesses casos em que é possível se encontrar a intersecção, que corresponde ao conjunto unitário, solução única, diz-se que o sistema é Possível e Determinado. Entretanto, caso as retas sejam sobrepostas, diz- se que o sistema é Possível e Indeterminado, pois a intersecção contém infinitos pontos. No caso de serem retas paralelas, não há intersecção entre elas, ou ainda, a intersecção é o conjunto vazio e o sistema passa a ser classificado como Impossível, sem solução.

Para aprofundar o conhecimento sobre a classificação de um sistema linear, em relação à sua solução, veja:

Sistema de Equações Lineares

2. SOBRE AS FUNÇÕES: REFLETINDO SOBRE A VARIAÇÃO

Ao se tratar sobre Métodos Quantitativos, é comum a associação entre dados disponíveis em conjuntos distintos, em outras palavras, estudam-se relações entre grandezas. Estas grandezas podem ser das mais diversas naturezas, como exemplo, peso e altura, consumo de energia elétrica e valor a ser pago, entre outras. Entretanto, tais quantidades possuem em comum a característica da variação, da possibilidade de variar, e, com isso passam a ser chamadas de variáveis.

2.1 A Caracterização das Funções

No contexto da Matemática, as Funções podem ser entendidas como relações entre variáveis, respeitando algumas características específicas. Há interesse em se avaliar o comportamento de uma variável a partir do comportamento de outra variável. É comum a utilização da notação, x para a primeira, que é dita independente, isto é, cuja variação é, em princípio, independente e, y para a segunda, cuja variação está relacionada com a variação de x. Portanto, para representar esta ideia de que uma é dependente da outra, por meio de *f*, utiliza-se a notação y = *f*(x).

Cabe ressaltar que x pertence a um conjunto, ou seja, possui características específicas, e y, da mesma forma, pertence a outro conjunto. O conjunto ao qual x pertence é denominado Domínio e o conjunto que contém as possibilidades de valores para y é denominado Contradomínio. Ainda, admite-se um caráter determinístico para a relação entre as variáveis, não há lugar para a dubiedade, assim, cada valor assumido por x deve corresponder a um único valor para y. Os valores realmente assumidos por y, mediante a relação y = *f*(x), determinam a Imagem de *f*.

Para compreender melhor sobre as funções, ler:

Funções

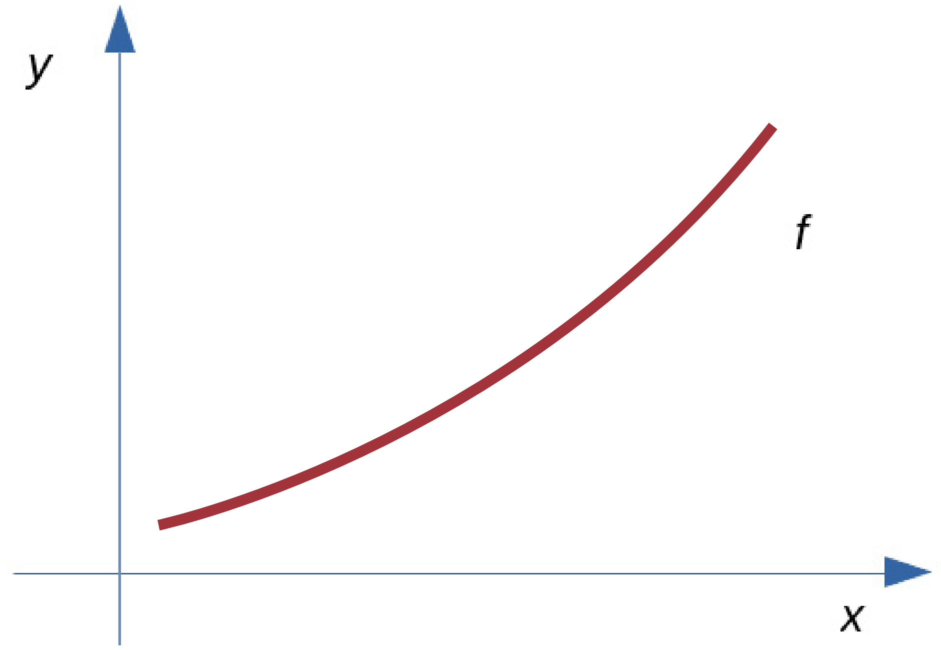
2.2 O Comportamento das Funções

Ao se admitir como foco a variação de y em relação à variação de x, com base na relação y = *f*(x), surgem algumas possibilidades. Basicamente, podemos considerar: 1) Não Crescente e 2) Não Decrescente. A situação 1) significa que o aumento em x não acarreta um aumento em y, ou seja, se x aumenta y pode se manter constante ou pode diminuir. Já 2) caracteriza a situação em que o aumento de x não implica na diminuição do valor de y, isto é, se x aumenta y pode se manter constante ou aumentar. Esta caracterização pode ser admitida ainda considerando-se três classes: constante, crescente ou decrescente. De modo geral, há interesse em se analisar a influência da variação de uma variável sobre a variação da outra e, surgem portanto as terminologias Função Constante, Função Crescente e Função Decrescente. Contudo, tais comportamentos podem ainda corresponder a subconjuntos do domínio, em outras palavras, uma função pode ser crescente em uma parte do seu domínio, constante em outra e decrescente em uma terceira região.

2.3 A Representação de uma Função

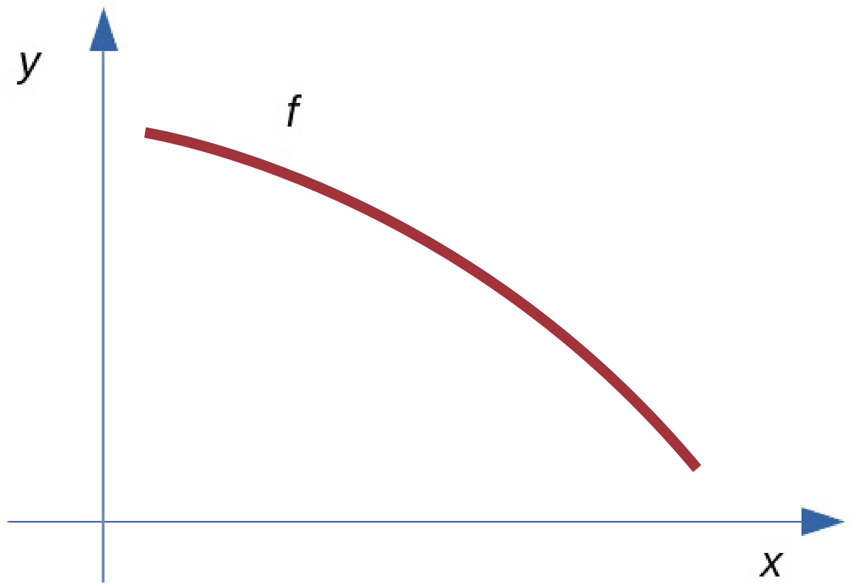
Uma função pode ser representada de várias formas, por meio de um diagrama, de uma tabela, de uma expressão algébrica, entre outras. Entretanto, a representação gráfica é muito utilizada pelo seu potencial autoexplicativo, que possibilita um entendimento imediato. Por exemplo, um comportamento crescente corresponde a uma elevação conforme representado na Figura 5, enquanto o decrescimento diz respeito ao declínio do gráfico como apresentado na Figura 6, e o comportamento constante é identificado pela reta paralela ao eixo das abcissas (Figura 7). As Figuras 5, 6 e 7 ilustram as classes abordadas na seção 2.2.

Figura 5 - Representação gráfica de uma Função Crescente



Fonte: Autor (2021).

Figura 6 - Representação gráfica de uma Função Decrescente



Fonte: Autor (2021).

Figura 7 - Representação gráfica de uma Função Constante

Fonte: Autor (2021).

REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Cálculo vol. 1**, 10 Ed., Porto Alegre, RS: Editora Bookman, 2014.

ATON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre, RS: Editora Bookman, 2012.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CENTRO-OESTE DO PARANÁ
UNICENTRO

NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA - NEAD
UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL - UAB

Prof. Me. Ademir Juracy Fanfa Ribas
Coordenador Geral Curso

Profª. Drª. Maria Aparecida Crissi Knuppel
Coordenadora Geral NEAD / Coordenadora Administrativa do Curso

Prof.ª Msª. Marta Clediane Rodrigues Anciutti
Coordenadora de Programas e Projetos / Coordenadora Pedagógica

Fabíola de Medeiros
Apoio Pedagógico

Ruth Rieth Leonhardt
Revisora

Murilo Holubovski
Designer Gráfico

Anni Roenkae/Pexels
Foto

Mai/2021